Colle du 29/01 - Sujet 1
Systèmes et continuité

Question de cours

1. Donner la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Montrer qu'un système à n équations et n inconnues homogène est de Cramer si et seulement s'il admet pour unique solution le n-uplet $(0,\ldots,0)$.

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f(0)=f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c) = f\left(c+\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1. \end{cases}$

Colle du 29/01 - Sujet 2
Systèmes et continuité

Question de cours

1. Enoncer le théorème de la bijection.
2. Montrer que si f converge en $a \in \mathbb{R}$ alors f est bornée au voisinage de a.

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{C}([0;1])$ telle que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \geqslant 0$. On suppose qu'il existe $x_0 \in]0;1[$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Exercice 2. Discuter suivant la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, les solutions du système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} (1-\lambda)x+y+z=1 \\ x+(1-\lambda)y+z=-1 \\ x+y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$

Colle du 29/01 - Sujet 3
Systèmes et continuité

Question de cours

1. Donner la définition de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ à l'aide de la définition.

Exercice 1. Soit $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} 2x + 2y + 2z + 2t = -4 \\ -x - y - 3z - 4t = 8 \\ 4x + 4y + 6z + 7t = -14 \\ x + y + z + t = -2 \\ 2x + 2y - t = 2. \end{cases}$

1. Montrer qu'il existe une solution de la forme $(-1, 0, 3, a)$, $a \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. On note $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction définie par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$. Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point.