Colle du 20/01 - Sujet 1
Réduction

Question de cours

1. Définir un endomorphisme diagonalisable.
2. Enoncer une CNS de diagonalisabilité en terme de polynôme annulateur.

Exercice 1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui la diagonaliser.

Exercice 2. Soient u et n deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $u \circ n = n \circ u$. On suppose que n est nilpotent i.e. qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $n^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Déterminer les valeurs propres de n puis son polynôme caractéristique.
2. Calculer $\det(n)$ et $\det(\mathrm{Id} + n)$.
3. Montrer que $\det(u + n) = \det(u)$.

Colle du 20/01 - Sujet 2
Réduction

Question de cours

1. Définir la trace. Cas d'un endomorphisme trigonalisable ?
2. Enoncer une CN de diagonalisablité.

Exercice 1. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 2. Déterminer toutes les matrices A diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 + 2A = 3I_n$.

Colle du 20/01 - Sujet 3
Réduction

Question de cours

1. Enoncer une CNS de trigonalisation.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si ....

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Supposons A diagonalisable. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. En déduire un condition nécessaire de diagonalisabilité.
3. Vérifier que cette condition est suffisante.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, $u_2 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 6u_{n+1} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

Déterminer une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.