Colle du 03/12 - Sujet 1
Réduction

Question de cours

1. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n soit diagonalisable.
2. Montrer que si x est un vecteur de propre d'un endomorphisme f, alors pour tout entier n, x est un vecteur propre de f^n.

Exercice 1. Déterminer si $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et si oui la diagonaliser.

Exercice 2. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})^2$ tel que $A^2 = B^2 = I_4$ et $AB + BA = 0_4$.

1. En calculant $\operatorname{tr}(BAB)$ de deux façons, montrer que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 0$.
2. Montrer que A et B sont diagonalisables et déterminer les valeurs propres et leurs ordres de multiplicité.
3. On note $C = iAB$, calculer C^2, $AC + CA$ et $BC + CB$ et en déduire les valeurs propres de iAB.

Colle du 03/12 - Sujet 2
Réduction

Question de cours

1. Définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre, d'un sous-espace propre, de l'ordre de multiplicité et comparaison entre la dimension du sous-espace propre et l'ordre de multiplicité.
2. Montrer que si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors λ est une valeur propre de f si et seulement si $\det(\lambda\,\mathrm{Id}_E - f) = 0$.

Exercice 1. Déterminer si $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et si oui la diagonaliser.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $a \neq b$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $\operatorname{Im}(f - a\mathrm{Id}_E) \cap \operatorname{Im}(f - b\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$. Montrer que f est diagonalisable.

Colle du 03/12 - Sujet 3
Réduction

Question de cours

1. Définition d'un endomorphisme diagonalisable, d'une matrice diagonalisable.
2. Montrer que si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est scindé simple sur $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable. Cependant la réciproque est fausse.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto X(X+1)P' - nXP \end{array}$. Déterminer si f est diagonalisable et si oui la diagonaliser.

Exercice 2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} - 3u_{n+2} + 4u_n = 0$. Déterminer une expression explicite de u_n.