Programme de colles 01
Logique, raisonnement et fonctions réelles

Quinzaine du 16 au 29 septembre

Logique et raisonnement

1. Valeur de vérité d'une assertion, négation, connecteurs logiques ET et OU.
2. Lois de Morgan, propriétés des connecteurs logiques (commutativité, associativité, distributivité).
3. Implication, contraposée, réciproque, équivalence.
4. Prédicats, quantificateurs universel et existentiel. Les étudiants doivent être capables de traduire un énoncé en français en une assertion mathématique et réciproquement. Non commutativité et négation des quantificateurs.
5. Méthodes de raisonnements : par raisonnement direct, contraposée, disjonctions de cas, double implication, raisonnement par analyse-synthèse.
6. Démonstration par récurrence, simple, double ou forte.

Fonctions réelles

1. Définition d'une fonction, ensemble de définition, ensemble image, image réciproque.
2. Opérations élémentaires sur les fonctions, composée.
3. Graphe d'une fonction, transformation du graphe (juste énoncé en classe) : translation horizontale $x \mapsto f(x+a)$, translation verticale $x \mapsto f(x)+a$, dilatation horizontale $x \mapsto f(ax)$, dilatation verticale $x \mapsto af(x)$.
4. Fonction paire, impaire, périodique, conséquences sur les graphes.
5. Monotonie, majoration, minoration, fonctions bornées.
6. Continuité : somme, produit, composition de fonctions continues, théorème des valeurs intermédiaires.
7. Dérivation : taux d'accroissement, équation de la tangente, dérivation d'une somme, d'un produit d'une composée.
8. Dérivées n-ièmes.

Questions de cours

Interroger chaque étudiant sur une des démonstrations suivantes :

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$.
3. Montrer que $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\exists!\,(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, g paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. Procédons par l'absurde. Soient $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ deux entiers premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Alors,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad \Rightarrow \qquad p^2 = 2q^2.$$

Donc p^2 est pair.

Lemme

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

On démontre le lemme par contraposée i.e. démontrons que n impair $\Rightarrow$ n^2 impair. Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Ainsi,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{\left(2k^2 + 2k\right)}_{=k' \in \mathbb{N}} + 1.$$

Donc n^2 est impair ce qui démontre le lemme.
Par le lemme, on en déduit que p est pair. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. Donc

$$2q^2 = p^2 = 4k^2 \qquad \Rightarrow \qquad q^2 = 2k^2.$$

Donc q^2 est pair. En utilisant le lemme avec $n = q$, on obtient que q est pair.
Ainsi, p et q sont pairs ET premiers entre eux, ce qui est absurde. Conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

□

Proposition (démo 2)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$.

Démonstration. Procédons par une récurrence double. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } u_n = 3^n + (-1)^n. \text{ »}$$

Initialisation. Si $n = 0$, alors $3^n + (-1)^n = 3^0 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2 = u_0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Si $n = 1$, $3^n + (-1)^n = 3^1 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2 = u_1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\mathscr{P}(n) \text{ ET } \mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies :

$$u_n = 3^n + (-1)^n, \quad u_{n+1} = 3^{n+1} + (-1)^{n+1}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n && \text{par définition} \\
&= 2\left(3^{n+1} + (-1)^{n+1}\right) + 3\left(3^n + (-1)^n\right) \\
&= 2 \times 3^{n+1} + 2 \times (-1)^{n+1} + 3^{n+1} + 3 \times (-1)^n \\
&= (2+1) \times 3^{n+1} + (-2+3) \times (-1)^n \\
&= 3 \times 3^{n+1} + (-1)^n \\
&= 3^{n+2} + (-1)^{n+2} && \text{car } (-1)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n + (-1)^n.}$$

□

Proposition (démo3)

Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe un unique couple $(g, h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, g paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Démonstration. Procédons par analyse-synthèse. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Analyse. Soit $(g, h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\begin{cases} (i) \ f = g + h \\ (ii) \ g \text{ paire,} \\ (iii) \ h \text{ impaire.} \end{cases}$. Puisque g est paire et h impaire, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(-x) = g(x) \text{ et } h(-x) = -h(x).$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) & (1) \\ f(-x) = g(x) - h(x) & (2) \end{cases}$$

Donc en faisant $\frac{(1)+(2)}{2}$, on trouve que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x).$$

De même en faisant $\frac{(1)-(2)}{2}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Nous avons ainsi entièrement déterminé g et h en fonction de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}) \end{cases}$$

Ce qui démontre l'unicité de la solution.
Synthèse. Soit $(g, h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}) \end{cases}$$

Alors, on observe les points suivants.

- (i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

  $$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

  Donc $f = g + h$.
- (ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

  $$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x).$$

  Donc g est paire.
- (iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

  $$h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

  Donc h est impaire.

Ce qui démontre que le couple (g, h) est bien une solution. □