Programme de colles 11
Dimension et séries

Quinzaine du 24 mars au 04 avril

Dimension finie

Tout le chapitre sur les espaces vectoriels.

1. Définition d'un espace de dimension finie.
2. Théorème de la base extraite, de la base incomplète. Existence d'une base en dimension finie.
3. Toutes les bases d'un même espace ont le même cardinal. Définition de la dimension.
4. Lien entre le cardinal et le caractère libre, générateur.
5. Sous-espace vectoriel de dimension finie.
6. Rang d'une famille finie de vecteurs. Lien avec le caractère libre, générateur.
7. Dimension de la somme, formule de Grassmann.
8. Caractérisation d'espaces supplémentaires avec la dimension. Existence d'un supplémentaire.

Séries numériques

1. Définitions : série, terme général d'une série, somme partielle, convergence, divergence, somme totale.
2. Deux séries qui coïncident à partir d'un certain rang ont même nature.
3. En cas de convergence, définition du reste d'ordre n. $R_n = S - S_n$ et $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. En cas de convergence, le terme général tend vers 0. Divergence grossière. Réciproque fausse.
5. L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel. Linéarité de la somme.
6. Séries géométriques, séries télescopiques, série exponentielle.
7. Théorème de comparaison série-intégrale. Séries de Riemann.
8. Séries à termes positifs : théorème de comparaison.
9. Deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents ont même nature.
10. Convergence absolue : définition, CVA $\Rightarrow$ CV, inégalité triangulaire de la somme.
11. Série dominée ou négligeable devant une série absolument convergente.

Questions de cours

1. Démontrer la caractérisation par les bases adaptées de la somme directe.
2. Existence d'un supplémentaire en dimension finie.
3. Théorème de comparaison.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. Posons $\mathscr{F} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$. Alors,

$$F \cap G = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{F} \text{ est libre.}$$

Démonstration. On pose $\mathscr{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F et $\mathscr{B}_G = (g_1, \ldots, g_q)$ une base de G.
Supposons $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que $\mathscr{F}$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k + \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k = 0.$$

Alors,

$$z = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k}_{\substack{\in F \\ \text{car } f_k \in F \text{ et } F \text{ espace vectoriel}}} = - \underbrace{\sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k}_{\substack{\in G \\ \text{car } g_k \in G \text{ et } G \text{ espace vectoriel}}}.$$

Donc $z \in F$ et $z \in G$ i.e. $z \in F \cap G = \{0_E\}$. D'où

$$0_E = z = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0 & \text{car } \mathscr{B}_F \text{ est libre (car c'est une base)} \\ \mu_1 = \cdots = \mu_q = 0 & \text{car } \mathscr{B}_G \text{ est libre (car c'est une base)} \end{cases}$$

Donc $\mathscr{F}$ est libre.
Réciproquement, supposons que $\mathscr{F}$ est libre. Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap G$. Alors, on a $\begin{cases} x \in F \\ x \in G \end{cases}$ et donc

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} \exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, & x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k & \text{car } \mathscr{B}_F \text{ est génératrice dans } F \text{ (car c'est une base de } F) \\ \exists\,(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q, & x = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k & \text{car } \mathscr{B}_G \text{ est génératrice dans } G \text{ (car c'est une base de } G) \end{cases} \\
&\Rightarrow x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k \\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k - \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_q = 0 \qquad \text{car } \mathscr{F} \text{ est libre} \\
&\Rightarrow x = 0_E.
\end{aligned}$$

Donc $F \cap G \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq F \cap G$ donc $F \cap G = \{0_E\}$. □

Proposition (démo 2)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nul.
Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E.

Démonstration. Notons $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Puisque E est de dimension finie, on sait que F est aussi de dimension finie, notons $p = \dim(F)$ sa dimension.

- Si $p = 0$, alors $F = \{0_E\}$ et donc E est un supplémentaire de F.
- Si $p = n$, alors $F = E$ et donc $\{0_E\}$ est un supplémentaire de F.

- Supposons maintenant $p \in [\![1; n-1]\!]$. Puisque F est de dimension finie, F admet une base. Soit $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. La famille $\mathscr{B}_F$ est donc libre dans F et donc dans E.
  D'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n$ (car $n \geqslant p+1$) des vecteurs de E tels que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E. On pose $G = \mathrm{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ et on note que $\mathscr{B}_G = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre en tant que sous-famille de $\mathscr{B}$ qui est libre. De plus $\mathscr{B}_G$ engendre G. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G. Ainsi, $\mathscr{B}_F$ est une base de F, $\mathscr{B}_G$ est une base de G et $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.
  Conclusion, d'après le théorème de la base adaptée, G est un supplémentaire de F.

□

Proposition (démo 3)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

1. Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et de plus
$$0 \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$
2. Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge également.

Démonstration.

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. Supposons que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge et notons $T = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$ sa somme totale. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant u_k \leqslant v_k.$$
Donc en sommant entre 0 et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k = T_n.$$
Or par positivité des v_n, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (en effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = v_{n+1} \geqslant 0$). De plus, par hypothèse, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T donc par le théorème de convergence monotone,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n \leqslant T_n \leqslant T \ \leftarrow \ \text{indépendant de } n.$$
Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. De plus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi croissante par positivité des termes u_n ($\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$). Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Par le théorème de convergence monotone pour les suites, on en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme totale. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant T$, par passage à la limite, on en déduit que
$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant T = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$
2. On vient de démontrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Donc par contraposée, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

□