Programme de colles 13
Intégration et Probabilités

Quinzaine du 13 au 24 mai

Intégration

1. Définition d'une subdivision et d'une fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.
2. Théorème d'approximation de Weierstrass si f est continue sur $[a; b]$ alors on peut l'approcher à ε près par une fonction φ en escalier.
3. Propriétés : linéarité, positivité/croissance, séparation (intégrale nulle d'une fonction continue et positive), relation de Chasles.
4. Inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.
5. Théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale de a à x de f est l'unique primitive de f. Cas de l'intégrale de f' lorsque f est $\mathscr{C}^1$.
6. Sommes de Riemann et convergence des sommes.
7. Inégalité de Taylor-Lagrange.

Probabilités

1. Définition d'un univers, d'un évènement, d'un évènement élémentaire, d'une issue.
2. Définition d'une probabilité sur un univers fini et d'un espace probabilisé.
3. Définition d'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Notation $(X = x)$, $(X \leqslant x)$ etc.
4. Evènements impossibles/négligeables, certains, incompatibles.
5. Probabilité du complémentaire, de l'union (quelconque), croissance de la probabilité.
6. Système complet d'évènements (incompatibles). Distribution de probabilités.
7. Existence et unicité d'une probabilité définie sur les singletons uniquement.
8. Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors $(X = x_i)$ forme un système complet d'évènements (incompatibles). Application au calcul de $\mathbb{P}(X \in A)$.
9. Loi d'une variable aléatoire.
10. Cas de la variable aléatoire $Y = \varphi(X)$. « Théorème de transfert » pour les probabilités : $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y = \varphi(x)}} \mathbb{P}(X = x)$.
11. Probabilité uniforme/équiprobable. Définition, calcul d'une probabilité d'un évènement à l'aide des cardinaux.
12. Lois usuelles : loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$, loi de Bernoulli, loi binomiale.
13. Probabilité conditionnelle. Définition de $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A \mid B)$. L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur Ω.
14. Formule des probabilités composées, des probabilités totales. Formule de Bayes
15. Indépendance : définition pour deux évènements. Indépendance et indépendance mutuelle pour une famille d'évènements.

Note aux colleurs : pas de couple de variables aléatoires, d'indépendance de variables aléatoires, d'espérance, de variance qui seront pour un prochain chapitre.

Questions de cours

1. Théorème fondamental de l'analyse : énoncé dans le cas continu et démonstration dans le cas lipschitzien.
2. Théorème des sommes de Riemann : énoncé dans le cas continu et démonstration dans le cas lipschitzien.
3. Démontrer la formule des probabilités totales.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1, Théorème Fondamental de l'Analyse)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I)$. Alors pour tout $A \in \mathbb{R}$, l'application

$$F \quad : \quad \begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f telle que $F(a) = A$.

Démonstration. Supposons que f est M-lipschitzienne sur I :

$$\forall\,(x;y) \in I, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x-y|\,,$$

Montrons que F est dérivable sur I et que pour tout $x_0 \in I$, $F'(x_0) = f(x_0)$. Fixons $x_0 \in I$ et posons pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$g(x) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\,.$$

Montrons que $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Soit $x \in I$, $x > x_0$. On a,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x-x_0}\left(F(x) - F(x_0)\right) - f(x_0) \times 1 \\ &= \frac{1}{x-x_0}\left(A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - A - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(x_0) \times \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x 1\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \left(f(t) - f(x_0)\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire, car $x > x_0$,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leqslant \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x M\,|t - x_0|\,\mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est } M\text{-lipschitzienne} \\ &\leqslant \frac{M}{x-x_0}\int_{x_0}^x (x - x_0)\,\mathrm{d}t && \text{car } x_0 \leqslant t \leqslant x \\ &= M\int_{x_0}^x 1\,\mathrm{d}t = M\,(x - x_0)\,. \end{aligned}$$

Or $M\,(x-x_0) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}}{\longrightarrow} 0$. Donc par le théorème encadrement,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} g(x) = 0.$$

On démontre de même que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} g(x) = 0$. On obtient alors que pour tout $x_0 \in I$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\,.$$

Conclusion, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

□

Théorème (démo 2, Somme de Riemann)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$S_n^{(1)}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n^{(2)}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^{(1)}(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n^{(2)}(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et f une fonction M-lipschitzienne sur $[a;b]$:

$$\forall (x;y) \in [a;b], \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|,$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. Par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

Notons que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Donc par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} M|t - x_k|\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } f \text{ } M\text{-lipschitzienne}\\ &\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} x_{k+1} - x_k\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{b-a}{n}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant M\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t = M\frac{b-a}{n}\int_a^b 1\,\mathrm{d}t = M\frac{(b-a)^2}{n}\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $M(b-a)^2$ ne dépendant pas de n, on en conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^{(1)}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n^{(1)}(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On procède de même pour $S_n^{(2)}(f)$. □

Proposition (démo3, Formule des probabilités totales)

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(B_k)_{k \in [\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ un système complet d'évènements. On a pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \mid B_k)\, \mathbb{P}(B_k).$$

Démonstration. La famille $(B_k)_{k \in [\![1;p]\!]}$ forme un système complet :

(i) les B_k sont incompatibles deux à deux : $\forall i \neq j$, $\mathbb{P}(B_i \cap B_j) = 0$.

(ii) l'union est complète : $\bigcup_{k \in [\![1;p]\!]} B_k = \Omega$.

Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, on pose $A_k = A \cap B_k$. Alors, on a

$$A = A \cap \Omega \underset{\text{par }(ii)}{=} A \cap \left(\bigcup_{k \in [\![1;p]\!]} B_k \right) = \bigcup_{k \in [\![1;p]\!]} (A \cap B_k) = \bigcup_{k \in [\![1;p]\!]} A_k.$$

De plus, les A_k sont incompatibles deux à deux : pour tout $(i, j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$,

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A \cap B_i \cap B_j) \leqslant \mathbb{P}(B_i \cap B_j) \underset{\text{par }(i)}{=} 0.$$

Donc $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$.
Dès lors, on obtient

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in [\![1;p]\!]} A_k \right) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \cap B_k).$$

De plus pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $\mathbb{P}(A \cap B_k) = \mathbb{P}(A \mid B_k)\, \mathbb{P}(B_k)$ d'après la formule des probabilités composées ce qui implique bien que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \mid B_k)\, \mathbb{P}(B_k).$$

□