Programme de colles 02
Bijections et trigonométrie

Quinzaine du 30 septembre au 11 octobre

Fonctions réelles

1. Révisions du programme précédent sur les fonctions réelles.
2. Asymptote, branche parabolique.
3. Injection, surjection, bijection.
4. Fonction réciproque, graphe de la fonction réciproque.
5. Théorème de la bijection. Théorème de la dérivée de la réciproque.
6. Définition de la relation de négligeabilité (juste la définition).

Trigonométrie

1. Définition géométrique du radian, du cosinus et du sinus. Définition de la fonction tangente comme le rapport du sinus par le cosinus. Ensemble de définition de la fonction tangente.
2. Propriétés des fonctions cosinus, sinus et tangente : parité, périodicité, signe, dérivabilité, dérivées, variations.
3. Valeurs particulières des fonctions trigonométriques. Les étudiants doivent être capables d'étendre les valeurs du premier quart de cercle au reste du cercle et de connaître (ou retrouver rapidement) les formules associées.
4. Limites remarquables (sans démonstration) :
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = 1.$$
5. Formulaire : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a+b)$, formules de linéarisation $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, cas où $a = b$, formules de factorisation $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
6. Formules de l'angle moitié.
7. Introduction aux congruences, définition $x \equiv y\ [\alpha]$, compatibilité avec l'addition et la soustraction.
8. Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques.
9. Forme polaire de $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$: $A\cos(\theta - \varphi)$.

Questions de cours

Interroger chaque étudiant sur **une formule de trigonométrie** puis sur une des démonstrations suivantes :

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2 - 1\right)$ définit une bijection de $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction réciproque.
2. Démontrer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
3. Montrer que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ à l'aide de limites usuelles.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

La fonction $f : \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x^2-1\right) \end{array}$ est bijective et sa réciproque est donnée par $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]1;+\infty[\\ y & \mapsto & \sqrt{\mathrm{e}^y+1} \end{array}$.

Démonstration. Soit $x > 1$. Alors $x^2 > 1$ puis $x^2 - 1 > 0$ et donc $f(x)$ existe. Donc f est bien définie sur $]1;+\infty[$. Soit $(x, y) \in]1;+\infty[\times \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln\left(x^2-1\right) \quad & \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = x^2 - 1 && \text{car } x^2-1>0 \text{ car } x>1 \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 = \mathrm{e}^y+1 \\ & \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\mathrm{e}^y+1}, && \text{car } x > 1 \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{e}^y+1>0. \end{aligned}$$

On remarque que $\mathrm{e}^y+1 > 1$ et donc on a bien $x = \sqrt{\mathrm{e}^y+1} > 1$. Donc pour tout point $y \in \mathbb{R}$, il existe une unique antécédent $x \in]1;+\infty[$ par f. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien bijective et } f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]1;+\infty[\\ y & \mapsto & \sqrt{\mathrm{e}^y+1} \end{array}.}$$

□

Proposition (démo 2)

On a
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cos(3a) = \cos(2a+a) &= \cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a) \\ &= \left(2\cos^2(a)-1\right)\cos(a) - 2\cos(a)\sin(a)\sin(a) \\ &= 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\cos(a)\sin^2(a) \\ &= 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\cos(a)\left(1-\cos^2(a)\right) \\ &= 4\cos^3(a) - 3\cos(a). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $a = \frac{\pi}{3}$, on obtient que

$$-1 = \cos\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Posons $X = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Alors,
$$4X^3 - 3X = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 4X^3 - 3X + 1 = 0.$$
Or on remarque que $4X^3 - 3X + 1 = (X+1)\left(4X^2 - 4X + 1\right) = (X+1)(2X-1)^2$. Donc

$$0 = (X+1)(2X-1)^2 \quad \Rightarrow \quad X = -1 \text{ OU } X = \frac{1}{2}$$

Or $0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ donc par la stricte décroissance du cosinus sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $1 > X > 0$. Donc $X \neq -1$. Conclusion,

$$\boxed{X = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.}$$

□

Proposition (démo 3)

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a par la formule de développement,

$$\begin{aligned}\tau_x(h) &= \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x)\,(-h)\,\frac{1-\cos(h)}{h^2} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

Or on sait que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Donc τ_x admet une limite finie en 0 et

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \tau_x(h) = -\sin(x).$$

Conclusion, la fonction cosinus est dérivable en x et $\cos'(x) = -\sin(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\boxed{\text{cosinus est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos'(x) = -\sin(x).}$$

$\square$