

Programme de colles 03

Nombres complexes et Calcul algébrique

Quinzaine du 16 octobre au 10 novembre

Nombres complexes

1. Nombres complexes, propriétés élémentaires, partie réelle, imaginaire.
2. Représentation graphique, plan complexe, affixe d'un point, d'un vecteur.
3. Conjugaison, propriétés, interprétation graphique. Caractérisation des réels, des imaginaires purs par la conjugaison.
4. Module d'un complexe, propriétés, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
5. Module au carré d'une somme, inégalité triangulaire (inférieure et supérieure).
6. Complexes de module 1, stabilité par produit, inverse/conjugué.
7. Définition de l'exponentielle complexe sur les imaginaires purs uniquement, propriétés. Formules d'Euler, formule de Moivre. Les étudiants doivent être capable de factoriser une somme d'exponentielles par l'angle moitié.
8. Argument d'un nombre complexe, forme polaire/trigonométrique, « unicité » de l'écriture. Propriétés de l'argument. Interprétation graphique avec l'angle entre deux vecteurs.

NB : les équations complexes et les racines n -ièmes feront l'objet d'un autre chapitre. L'interprétation graphique des notions de bases doivent être comprises mais nous n'avons pas traité d'exercice de géométrie complexe.

Calcul algébrique

1. Notations \sum et \prod et manipulations.
2. Formule de changement d'indice du type glissement $\tilde{k} = k + r$ ou inversion $\tilde{k} = n - k$.
3. Somme et produit télescopique. Sommation par paquets, somme des pairs/impairs.
4. Sommes usuelles : d'une constante, $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$.
5. Rappels sur les suites arithmétiques et les suites géométriques. Somme d'une suite géométrique.
6. Factorisation de $a^n - b^n$ (formule de Bernoulli).
7. Définition de factorielle n et du coefficient binomial.
8. Formule $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, formule de Pascal, formule du binôme de Newton.
9. Sommes doubles : indexées par un rectangle, par un triangle.

Questions de cours

1. Démonstration de $|z + z'|^2 = \dots$ et de l'inégalité triangulaire supérieure.
2. Démonstration de $\cos(p) + \cos(q) = \dots$ en passant par les complexes.
3. Démontrer la somme des premiers carrés à l'aide de la somme des premiers entiers.

Démonstrations de cours

Proposition (démonstration 1)

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2 \quad \text{et} \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Démonstration. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Posons $Z = z + z'$. Alors,

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= |Z|^2 = Z\bar{Z} \\ &= (z + z')\overline{(z + z')} \\ &= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} + |z'|^2. \end{aligned}$$

Posons $\omega = z\bar{z}'$. Alors, $\bar{\omega} = \bar{z}z'$. D'où,

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + \omega + \bar{\omega} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\omega) + |z'|^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2.}$$

D'autre part, on sait que,

$$\operatorname{Re}(z\bar{z}') = \operatorname{Re}(\omega) \leq |\omega| = |z\bar{z}'| = |z||z'|.$$

Donc par ce qui précède,

$$|z + z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2.$$

La fonction carrée étant croissante sur \mathbb{R}_+ et $|z + z'| \geq 0$ et $|z| + |z'| \geq 0$, on conclut,

$$\boxed{|z + z'| \leq |z| + |z'|.}$$

□

Proposition (démonstration 2)

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Démonstration. Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\cos(p) + \cos(q) = \operatorname{Re}(e^{ip}) + \operatorname{Re}(e^{iq}) = \operatorname{Re}(e^{ip} + e^{iq}).$$

Or par factorisation par l'angle moitié, on a

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}} \right) = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right).$$

Donc par la formule d'Euler,

$$e^{ip} + e^{iq} = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}.$$

D'où,

$$\cos(p) + \cos(q) = \operatorname{Re}\left(2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}\right) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\right) \quad \text{car } 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \in \mathbb{R}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).}$$

□

Proposition (démonstration 3)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on observe que

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

En sommant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1.$$

D'une part, on reconnaît à gauche une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1.$$

D'autre part, on reconnaît à droite S_n , la somme des premiers entiers et la somme d'une constante :

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 3S_n + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Ainsi,

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

Et donc,

$$\begin{aligned} 3S_n &= (n+1)^3 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= (n+1) \left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} \right] - (n+1) \\ &= (n+1) \left[n^2 + 2n + 1 - \frac{3n}{2} - 1 \right] \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2}{2} \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□