Programme de colles 05
Calcul de primitives et équations différentielles d'ordre 1

Quinzaine du 25 novembre au 06 décembre

Calcul d'intégrales et de primitives

1. Définition d'une primitive. En cas d'existence, description de l'ensemble des primitives.
2. Définition des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Théorème fondamental de l'analyse : existence d'une primitive F de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans le cas continu (sans démonstration) et unicité sous condition $F(A) = a$.
4. Corollaire $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
5. Propriétés de l'intégrale : inversion des bornes, linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: croissance, positivité et séparation (intégrale nulle d'une fonction continue et positive).
6. Intégrations par parties de deux fonctions $\mathscr{C}^1$.
7. Formule de changement de variable.
8. Primitives usuelles.
9. Intégration d'inverses de trinômes. Décomposition en éléments simples dans le cas de pôles simples (sinon guider la forme).

Equations différentielles d'ordre 1

1. Définition. Equation homogène associée.
2. Propriété de stabilité par combinaisons linéaires de l'espace homogène.
3. Notation sous forme d'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(f)$ ou $\mathrm{Vect}\,(f, g)$. *Juste la notation.*
4. Résolution de l'équation homogène.
5. Ensemble des solutions de l'équation non homogène à l'aide d'une solution.
6. Principe de superposition.
7. Méthode de variation de la constante.
8. Problème de Cauchy d'une équation différentielle d'ordre 1, existence et unicité.
9. Problème de raccord.

Questions de cours

1. Enoncé et démonstration de l'intégration par parties.
2. Enoncé et démonstration de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à l'aide des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière.
3. Méthode de variation de la constante.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $(u,v) \in \mathscr{C}^1\left([a;b], \mathbb{K}\right)^2$, alors,

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $(u,v) \in \mathscr{C}^1\left([a;b], \mathbb{K}\right)^2$. Posons pour tout $t \in [a;b]$, $F(t) = u(t)v(t)$. La fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ donc la fonction F est une primitive de la fonction F' qui est continue sur $[a;b]$. Donc par le corollaire du théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b}.$$

D'autre part, par dérivation du produit, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (u \times v)'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'intégrale.}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$[u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} = \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

□

Proposition (démo 2)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathscr{C}\left(I, \mathbb{K}\right)^2$,

$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E), $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation **homogène** associée à (E). On fixe $y_p \in \mathscr{S}$. Alors

$$\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \left\{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_0 \right\}.$$

Démonstration. Soit y une fonction dérivable sur I. Posons $y_0 = y - y_p$ i.e. $y = y_p + y_0$. La fonction y_0 est dérivable sur I comme différence de fonctions qui le sont et l'on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad y_p'(x) + y_0'(x) + a(x)\left(y_p(x) + y_0(x)\right) = b(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \underbrace{y_p'(x) + a(x)y_p(x)}_{=b(x) \text{ car } y_p \in \mathscr{S}} + y_0'(x) + a(x)y_0(x) = b(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad b(x) + y_0'(x) + a(x)y_0(x) = b(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad y_0'(x) + a(x)y_0(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y_0 \text{ est solution de } (E_0) \\
&\Leftrightarrow \quad y \in \left\{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_0 \right\}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on a bien,

$$\boxed{\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_0 \}.}$$

$\square$

Démo 3 (méthode de variation de la constante)

Démonstration. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})^2$,

$$(E) \qquad \forall t \in I, \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée. Soit y une fonction dérivable sur I et $y_0 \in \mathscr{S}_0$ une solution qui **ne s'annule pas** sur I. Posons $\lambda : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{y(t)}{y_0(t)} \end{array}$ qui est bien définie car pour tout $t \in I$, $y_0(t) \neq 0$. Puisque $y_0 \in \mathscr{S}_0$, alors y_0 est dérivable sur I et donc λ aussi. Alors, on a

$$\begin{array}{rcll}
y \in \mathscr{S} & \Leftrightarrow & \forall t \in I, & y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in I, & \lambda'(t)y_0(t) + \lambda(t)y_0'(t) + a(t)\,\lambda(t)y_0(t) = b(t) \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in I, & \lambda'(t)y_0(t) + \lambda(t)\left(y_0'(t) + a(t)y_0(t)\right) = b(t) \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in I, & \lambda'(t)y_0(t) = b(t) \qquad \text{car } y_0 \in \mathscr{S}_0 \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in I, & \lambda'(t) = \dfrac{b(t)}{y_0(t)}. \qquad \text{car } \forall t \in I,\ y_0(t) \neq 0
\end{array}$$

La fonction $t \mapsto \frac{b(t)}{y_0(t)}$ est continue sur I donc admet des primitives. Soit Γ une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{y_0(t)}$. Alors,

$$\begin{array}{rcll}
y \in \mathscr{S} & \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{K},\ \forall t \in I, & \lambda(t) = \Gamma(t) + C \\
& \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{K},\ \forall t \in I, & y(t) = \lambda(t)y_0(t) = \Gamma(t)y_0(t) + Cy_0(t).
\end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \Gamma(t)y_0(t) + Cy_0(t) \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{K} \right\}.}$$

$\square$