Programme de colles 06
Equations différentielles d'ordre 2, calculs dans $\mathbb{R}$

Quinzaine du 11 au 22 décembre

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Equations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants $ay'' + by' + cy = d(x)$, équation homogène associée.
2. Stabilité de l'ensemble des solutions de l'équation homogène par combinaisons linéaires.
3. Equation caractéristique associée.
4. Ensemble des solutions complexes de l'équation homogène.
5. Ensemble des solution réelles de l'équation homogène.
6. Structure de l'ensemble des solutions de l'équation non homogène $\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0$, avec y_p une solution.
7. Principe de superposition.
8. Recherche de la solution particulière lorsque le second membre est du type $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ où $P(x)$ est un polynôme, ou lorsque le second membre est trigonométrique.
9. Problème de Cauchy. Unicité et existence de la solution (admis).

Calcul dans $\mathbb{R}$

1. Définition des ensembles de base $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
2. Propriétés élémentaires de la relation d'ordre $\leqslant$ compatibilité avec $+$, $\times$, le passage à l'inverse, le carré.
3. Définition du majorant, minorant, partie majorée, minorée, bornée.
4. Définition du maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.
5. Théorème (admis) : toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Caractérisation de la borne supérieure. De même pour la borne inférieure. *Pas d'exercice trop théorique !*
6. Définition d'un intervalle et classification des intervalles.
7. Propriété d'Archimède, définition de la partie entière, graphe et propriétés élémentaires.
8. Valeur absolue, graphe et propriétés élémentaires.
9. Distance entre deux réels, inégalité triangulaire.
10. Résolutions d'équations, d'inéquations avec valeur absolue et/ou racine carrée.
11. Résolution de systèmes linéaires (aucun exo avec paramètre n'a été traité en classe) par la méthode du pivot de Gauss.

Questions de cours

1. Démonstration d'un lemme sur l'ensemble des solutions complexes d'une équation différentielle homogène d'ordre 2 (méthode d'abaissement du degré dans le cas constant et homogène).
2. Montrer que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.
3. Déterminer l'ensemble des intervalles non vides, non réduits à un singleton et bornés de $\mathbb{R}$.

Démonstrations de cours

Démo 1 (abaissement du degré dans le cas constant)

Démonstration. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$ et

$$(E_0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

On note $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0). Soient

- (E_c) : $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée à (E),
- r une solution/racine de (E_c)
- $y_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{rt} \end{array}$
- y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{y(t)}{y_0(t)} \end{array}$.

On sait/admet/vérifie que $y_0 \in \mathscr{S}_0$. La fonction λ bien définie car $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = \mathrm{e}^{rt} \neq 0$ et est même deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrons que

$$y \text{ est solution de } (E_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda' \text{ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.}$$

Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \lambda(t)y_0(t)$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = \lambda'(t)y_0(t) + \lambda(t)y_0'(t) \qquad \text{et} \qquad y''(t) = \lambda''(t)y_0(t) + 2\,\lambda'(t)y_0'(t) + \lambda(t)y_0''(t)$$

On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
y \in \mathscr{S}_0 \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ a\,\lambda''(t)y_0(t) + 2a\,\lambda'(t)y_0'(t) + a\,\lambda(t)y_0''(t) + b\,\lambda'(t)y_0(t) + b\,\lambda(t)y_0'(t) + c\,\lambda(t)y_0(t) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ a\,\lambda''(t)y_0(t) + (2ay_0'(t) + by_0(t))\,\lambda'(t) + \lambda(t)\,(ay_0''(t) + by_0'(t) + cy_0(t)) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ a\,\lambda''(t)\,\mathrm{e}^{rt} + \left(2ar\,\mathrm{e}^{rt} + b\,\mathrm{e}^{rt}\right)\lambda'(t) + 0 = 0 \qquad \textit{car } y_0 \in \mathscr{S}_0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ a\,\lambda''(t) + (2ar + b)\,\lambda'(t) = 0 \qquad \textit{car } \mathrm{e}^{rt} \neq 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, y est solution de (E_0) si et seulement si λ' est solution de l'équation

$$\boxed{(F) \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) + \left(2r + \frac{b}{a}\right)z(t) = 0.}$$

□

Proposition (démo 2)

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.

Démonstration. Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$ possédant un minorant : il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall a \in A, \qquad n_0 \leqslant a.$$

Par contraposée on observe que pour tout $n < n_0$, on a $n \notin A$.
Procédons par l'absurde et supposons que A n'admet aucun minimum.
Posons pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$: « $n \notin A$ ». Montrons par récurrence forte que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Initialisation. Si $n = n_0$. Par hypothèse, n_0 est un minorant de A et A n'admet pas de minimum. Donc $n_0 \notin A$ et $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \geqslant n_0$. Supposons que pour tout $k \in [\![n_0; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie. On a vu que pour tout $k < n_0$, $k \notin A$ et par hypothèse de récurrence pour tout $k \in [\![n_0; n]\!]$, $k \notin A$. Donc pour tout $k \leqslant n$, $k \notin A$. Autrement dit pour tout $k \in A$, on a $k > n$ ou encore $k \geqslant n+1$. Donc $n+1$ est un minorant de A. Or A n'admet pas de minimum donc $n+1 \notin A$. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e. $n \notin A$. Or on a vu aussi que pour tout $n < n_0$, $n \notin A$. Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \notin A$ et A est donc vide ce qui est contradictoire. Conclusion, toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.

□

Proposition (démo 3)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, borné, non réduit à un singleton. Alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que

$$]a; b[\subseteq I \subseteq [a; b].$$

Démonstration. Puisque I est borné, alors I est minoré. De plus I est non vide. Donc $a = \inf I$ existe. De même I est majoré et non vide donc $b = \sup I$ existe. Montrons que $]a; b[\subseteq I \subseteq [a; b]$.
Montrons que $]a; b[\subseteq I$. Soit $x \in]a; b[$. Alors, $x > a$. Or a en tant que borne inférieure est le plus grand des minorants. Donc x n'est pas un minorant de I i.e.

$$\exists \alpha \in I, \quad \alpha < x.$$

De même, $x < b$ et b en tant que borne supérieure est le plus petit des majorants. Donc x n'est pas un majorant de I :

$$\exists \beta \in I, \quad x < \beta.$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} \alpha < x < \beta \\ (\alpha, \beta) \in I^2 \\ I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x \in I.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in]a; b[$, on en déduit que $]a; b[\subseteq I$.
D'autre part, montrons que $I \subseteq [a; b]$. Soit $x \in I$. Puisque $a = \inf I$, alors a est un minorant de I et donc $a \leqslant x$. De même $b = \sup I$ est un majorant de I donc $x \leqslant b$. Ainsi $a \leqslant x \leqslant b$ i.e. $x \in [a; b]$. Ceci étant vrai pour tout $x \in I$, on en déduit que $I \subseteq [a; b]$. D'où,

$$]a; b[\subseteq I \subseteq [a; b].$$

Dès lors, on observe les cas suivants *(ne pas hésiter à finir à l'oral)* :

- si $a \notin I$ et $b \notin I$, alors $I =]a; b[$.
- si $a \notin I$ et $b \in I$, alors $I =]a; b]$.
- si $a \in I$ et $b \notin I$, alors $I = [a; b[$.
- si $a \in I$ et $b \in I$, alors $I = [a; b]$.

$\square$