# Programme de colles 07
# Matrices et Analyse asymptotique

*Quinzaine du 06 au 17 janvier*

## Calcul matriciel

1. Définition d'une matrice, d'un vecteur ligne ou colonne. Addition de deux matrices et multiplication par un scalaire.
2. Produit matriciel et compatibilité avec l'addition.
3. Définition des matrices carrées et de la matrice identité. Non-intégrité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Stabilité.
5. Définition de la puissance d'une matrice. Formule du binôme de Newton et égalité de Bernoulli lorsque les matrices commutent.
6. Matrices inversibles. Théorème admis : si une matrice est inversible à droite ou à gauche alors elle est inversible. Inverse du produit.
7. Transposée d'une matrice. Linéarité. Transposée d'un produit.
8. Matrices symétriques, antisymétriques, stabilité des ensembles.
9. Trace d'une matrice. Linéarité. Trace d'un produit.
10. Lien entre un système linéaire et une équation matricielle, version matricielle des opérations élémentaires.
11. Caractérisation de l'inverse d'une matrice en étant équivalente à $I_n$. Cas des matrices diagonales ou triangulaires.
12. Calcul de l'inverse d'une matrice.
13. Résolution de systèmes linéaires par l'algorithme de Gauss. Cas de systèmes à paramètre.

## Analyse asymptotique

1. Négligeabilité : définition par la limite du quotient. Notation $\ll$ ou $o$. Nouvelles croissances usuelles.
2. Propriétés algébriques des $o$ : transitivité, somme, produit, absorption des constantes, inverse.
3. Equivalence : définition par la limite du quotient. Lien avec $o$.
4. Deux équivalents ont même nature (convergence ou divergence), même limite (lorsqu'elle existe) et même signe (lorsqu'il est fixe).
5. Théorème d'encadrement des équivalents.
6. Opérations algébriques sur les équivalents : produit, élévation à une puissance fixe, passage à l'inverse notamment, passage à la valeur absolue. Changement de variables. Equivalents usuels.
   **Anti-proposition : interdit de sommer, de composer les équivalents, d'écrire équivalent à 0.**
7. Développements limités en 0, en $x_0$. Unicité, troncature. Cas des fonctions paires ou impaires en 0.
8. DL et continuité/dérivabilité. Toute fonction $\mathscr{C}^n$ admet un DL d'ordre $n$.
9. DL usuels : $e^x$, cos, sin, tan (à l'ordre 5), ch, sh, arctan, $(1+x)^\alpha$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$.
10. Somme, produit, composée et quotient de DL.
11. Primitivation des développements limités. Théorème de Taylor-Young.
12. Application : recherche de limites, d'asymptote, de tangente, position par rapport à la tangente au voisinage.
13. Rapide complément sur la domination.

## Questions de cours

On demandera à chaque étudiant de réciter un développement usuel ($e^x$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $(1+x)^\alpha$, $\arctan(x)$) à un ordre autour de 4 ou 5 puis de restituer une démonstration parmi celles ci-dessous.

1. Démonstration de la formule de la trace du produit.
2. A l'aide du lemme admis sur l'intégration d'un petit $o$ démontrer le théorème de primitivation des développements limités.
3. Démontrer la formule de Taylor-Young (l'énoncé en $x_0$, la démo en 0).

# Démonstrations de cours

**Proposition (démo 1)**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

**Démonstration.** Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $C = AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $D = BA = (d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Par la formule du produit, on a

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ c_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![1;n]\!],\ d_{j,j} = \sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j}.$$

Donc par définition de la trace,
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i}.$$

On se retrouve avec une somme rectangulaire dont on inverse l'ordre de sommation :
$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} \qquad \text{car } a_{i,j} \text{ et } b_{j,i} \text{ sont deux coefficients réels} \\ &= \sum_{j=1}^{n} d_{j,j} \\ &= \operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(BA). \end{aligned}$$

Conclusion,
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

□

**Théorème (Primitivation des DL - démo 2)**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $I$ un voisinage de 0, $f$ une fonction définie sur $I$ admettant un développement limité d'ordre $n$ en 0 :
$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$. Alors $F$ admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 qui est donné par
$$F(x) \underset{x \to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right) \underset{x \to 0}{=} F(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o\left(x^{n+1}\right).$$

**Démonstration.** On pose pour tout $x \in I$,
$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

On a alors par hypothèse,
$$g(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n).$$

Posons ensuite
$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Puisque $F$ est une primitive de $f$, on observe que $G$ est une primitive de $g$. De plus, $g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. Ainsi par primitivation du petit $o$, on en déduit que $G(x) \underset{x\to 0}{=} G(0) + o\left(x^{n+1}\right)$. Or $G(0) = F(0) - \sum_{k=0}^{n} 0$ (car la somme n'a pas de terme constant en $x^0$) donc

$$G(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + o\left(x^{n+1}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad F(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \underset{x\to 0}{=} F(0) + o\left(x^{n+1}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^{k} + o\left(x^{n+1}\right).}$$

□

**Théorème (Taylor-Young - démo 3)**

Soient $I$ un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right).$$

**Démonstration.** On suppose $x_0 = 0$. Soit $I$ un voisinage de 0. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } \forall f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}), \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \text{ »}$$

*Initialisation.* Si $n = 0$ ou même $n = 1$, cela correspond à une propriété du cours.
*Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. La fonction $f'$ existe sur $I$ et même $f' \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$. Donc par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Puisque la fonction $f$ est une primitive de $f'$ sur $I$, par le théorème de primitivation des développements limités,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{k}(0)}{k!} x^{k} + o\left(x^{n+1}\right) \qquad \text{en posant } \tilde{k} = k+1 \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{k}(0)}{k!} x^{k} + o\left(x^{n+1}\right), \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
*Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et le théorème est démontré pour $x_0 = 0$.

□