# Programme de colles 09
# Suites numériques et polynômes

*Quinzaine du 10 février au 21 février*

## Suites numériques

1. mode de définition d'une suite réelles : de façon explicite, implicite, par récurrence (simple ou double).
2. Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : expressions explicites.
4. Suites monotones. Suites convergentes, divergentes. Une suite convergente est bornée.
5. Une suite est bornée si et seulement la suite des valeurs absolues est majorée.
6. Une suite est asymptotiquement du même signe que sa limite (si celle-ci existe et est non nulle).
7. Si $u_n \to l$ alors $|u_n| \to |l|$ avec réciproque si $l = 0$.
8. Théorème d'encadrement et de convergence monotone.
9. Définition d'une suite extraite. Si la suite converge alors toute suite extraite converge vers la même limite. Réciproque si la suite des termes pairs et la suite des termes impairs convergent vers la même limite.
10. Suites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
11. Moyenne de Cesàro. Si la suite converge alors sa moyenne de Cesàro converge vers la même limite.
12. Suites complexes : définition de la limite. Toute suite complexe qui converge est bornée, unicité de la limite, opérations sur les limites.
13. Caractérisation de la convergence avec les parties réelles et imaginaires.
14. Suites récurrentes linéaires complexes d'ordre 2.

## Polynômes

1. Définition d'un polynômes, addition, produit, composition. Degré d'un polynôme, de la somme, du produit, de la composition.
2. Polynômes de degré inférieur ou égal à $n$. Evaluation d'un polynôme en un réel, une matrice, un fonction.
3. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
4. Polynôme dérivée. Dérivée $n$-ième. Linéarité de la dérivation. Formule de Leibniz.
5. Formule de Taylor pour les polynômes.
6. Divisibilité de $P$ par $Q$. Division euclidienne de polynômes. Méthode de Horner.
7. Racine d'un polynôme. Caractérisation par la factorisation.
8. Un polynôme ayant plus de racines que son degré est nul.
9. Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation avec les dérivées.
10. Factorisation des polynômes en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
11. Relation entre la somme des racines et les coefficients de $P$ et relation entre le produit des racines et les coefficients de $P$.

## Questions de cours

1. Montrer que deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.
2. Montrer la formule de Taylor pour les polynômes.
3. Démontrer que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de $P$ alors $\prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)$ divise $P$. *On admettra l'initialisation.*

# Démonstrations de cours

**Proposition (démo 1)**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes alors elles convergent et ont une limite commune :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}.$$

**Démonstration.** On suppose que

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante
3. $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Par 1, $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par 2, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Donc par somme, $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus par 3, cette suite converge vers 0. Donc par le théorème de convergence monotone, $0 = \inf\{v_n - u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$ ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \geqslant u_n.$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on obtient en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $u_0$. Par le théorème de convergence monotone, on en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$. De la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_0 \geqslant v_n \geqslant u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $v_0$. Par le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell'$. Par conséquent $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell'$. Or par 3, on sait que $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par unicité de la limite, $\ell = \ell'$.

□

**Proposition (démo 2)**

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, $n = \deg(P)$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

ou encore

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

**Démonstration.** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$ et $n = \deg(P)$.
*Pemier cas,* on suppose que $a = 0$ et notons

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

On sait que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$ et tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\left(X^k\right)^{(r)} = \begin{cases} 0 & \text{si } r > k \\ \frac{k!}{(k-r)!} X^{k-r} & \text{si } r \leqslant k. \end{cases}$$

Donc pour tout $r \in [\![0; n]\!]$,

$$P^{(r)} = \sum_{k=r}^{n} \frac{k!}{(k-r)!} a_k X^{k-r} = r! a_r + \frac{(r+1)!}{1!} a_{r+1} X + \dots$$

En particulier,

$$P^{(r)}(0) = r! a_r \qquad \Leftrightarrow \qquad a_r = \frac{P^{(r)}(0)}{r!}.$$

Ainsi,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

*Cas général,* soit $a \in \mathbb{K}$ quelconque. On pose $Q = P(X+a) = P \circ (X+a)$. On a $\deg(Q) = \deg(P) \times \deg(X+a) = n \times 1 = n$. Par ce la formule précédente appliquée à $Q$ :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

D'autre part, par dérivée de la composée, on a pour tout $r \in [\![0; n]\!]$,

$$\begin{aligned} Q' &= (P \circ (X+a))' = P' \circ (X+a) \\ Q'' &= P'' \circ (X+a) \\ &\vdots \\ Q^{(r)} &= P^{(r)} \circ (X+a). \end{aligned}$$

Par conséquent, $Q^{(r)}(0) = P^{(r)}(a)$. Conclusion,

$$P(X+a) = Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k.$$

En composant par $X - a$, on obtient également,

$$P(X) = P((X-a)+a) = P(X+a) \circ (X-a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

□

**Proposition (démo 3)**

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines **distinctes** de $P$ alors $\prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_i)$ divise $P$.

**Démonstration.** On fixe $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, $p$ scalaires distincts. On pose pour tout $k \in [\![1; p]\!]$ la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(k) \quad : \quad « \, \forall P \in \mathbb{K}[X], \text{ si } \alpha_1, \dots \alpha_k \text{ sont racines de } P \text{ alors } \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i) \,|P \, ».$$

*Initialisation.* Si $k = 1$, d'après une propriété du cours, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
*Hérédité.* Soit $k \in [\![1; p-1]\!]$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ soient des racines de $P$. Alors puisque $a_{k+1}$ est une racine de $P$, d'après l'initialisation, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha_{k+1}) Q.$$

Pour tout $i \in [\![1; k]\!]$, $\alpha_i \neq \alpha_{k+1}$ donc $P(\alpha_i) = 0 \;\Rightarrow\; (\alpha_i - \alpha_{k+1}) Q(\alpha_i) = 0 \;\Rightarrow\; Q(\alpha_i) = 0$. On obtient donc $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des racines de $Q$. Donc d'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $\prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i) \,|Q$ i.e. $\exists Q_1 \in \mathbb{K}[X]$, $Q = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i) Q_1$ et donc

$$P = (X - \alpha_{k+1}) Q = (X - \alpha_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i) Q_1 = \prod_{i=1}^{k+1} (X - \alpha_i) Q_1.$$

Autrement dit, $\prod_{i=1}^{k+1} (X - \alpha_i) \,|P$ et donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
*Conclusion :* pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et notamment $\mathscr{P}(p)$ est vraie ce qui démontre la proposition. □