Devoir Maison 0
Révisions de terminale

A faire pour le lundi 2 septembre

Exercice I - Géométrie

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les points

$$A\,(2,4,1)\,,\ B\,(0,4,-3)\,,\ C\,(3,1,-3)\,,\ D\,(1,0,-2)\,,\ E\,(3,2,-1)\,,\ I\left(\frac{3}{5},4,-\frac{9}{5}\right).$$

1. (a) Vérifier que $\vec{n}\,(2,2,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. (a) Calculer le projeté orthogonal de D sur (ABC).
   (b) En déduire la distance de D à (ABC).
3. Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales ou non.
4. Déterminer des équations paramétriques de la droite (CD).
5. Déterminer si le point I appartient à la droite (AB) ou non.

Exercice II - Analyse

Soit f la fonction définie par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\,\mathrm{e}^{1-x} \end{array}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.
2. (a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa fonction dérivée f'.
4. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

5. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n.
7. En déduire I_2.
8. Donner une interprétation graphique de I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 4.
9. Justifier que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x de $[0;1]$, on a les inégalités suivantes :
$$x^n \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}\,.$$
10. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice III - Complexes (introduction)

On définit i un nombre vérifiant l'égalité $i^2 = -1$ et on admet l'existence d'un tel nombre. On appelle *complexe* tout nombre z s'écrivant sous la forme $z = a + ib$ avec a et b deux **réels**. On admet que cette écriture est unique. Dès lors, le réel a est alors appelé *la partie réelle* de z : $\operatorname{Re}(z) = a$ et le réel b est alors appelé *la partie imaginaire* de z : $\operatorname{Im}(z) = b$. On note $\mathbb{C} = \left\{ a + ib \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ l'ensemble des complexes. On dit qu'un complexe $z = a + ib$ est réel si et seulement sa partie imaginaire est nulle $b = 0$. Dans ce cas, $z = a$ et on obtient alors bien $z \in \mathbb{R}$. On observe donc en particulier que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1. Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes avec a, b, a', b' quatre réels.
   (a) Calculer $z_1 = z + z'$ et préciser la partie réelle et la partie imaginaire de z_1.
   (b) Calculer $z_2 = zz'$ et préciser la partie réelle et la partie imaginaire de z_2.
2. On suppose que a et b ne sont pas tous les deux nuls. En multipliant en haut et en bas la fraction par $a - ib$, calculer $z_3 = \frac{1}{z}$ et préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Pour tout complexe $z = a + ib$ avec a et b deux réels, on définit le complexe $\overline{z} = a - ib$ de partie réelle a et de partie imaginaire $-b$. Le complexe $\overline{z}$ est appelé *le conjugué* de z. Pour tout complexe z non nul (autrement dit avec a et b non tous les deux nuls), on pose

$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}}.$$

3. Soit $z = a + ib$ un complexe non nul. Déterminer la partie réelle et imaginaire de $f(z)$ et vérifier qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = kz$.
4. On pose $\mathbb{U} = \left\{ z = a + ib \in \mathbb{C} \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\}$.
   (a) Montrer que pour tout complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$, on a $f(z) = z \iff z \in \mathbb{U}$.
   (b) Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan. Représenter $\mathscr{U} = \{ M(a,b) \in \mathscr{P} \mid a + ib \in \mathbb{U} \}$.
5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; i\}$ un complexe différent de 0, 1 et de i. Montrer que
$$\frac{f(z) - 1}{f(z) - i} = \frac{1}{i} \overline{\left(\frac{z - 1}{z - i} \right)}.$$
   On pourra admettre que le conjugué du quotient est égal au quotient des conjugués.
6. Vérifier que pour $Z \in \mathbb{C}$, on a $Z = \overline{Z}$ si et seulement si $Z \in \mathbb{R}$.
7. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; i\}$ tels que $\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}$.
8. Vérifier que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; i\}$, on a
$$\frac{z - 1}{z - i} \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad \operatorname{Re}\left(\frac{f(z) - 1}{f(z) - i} \right) = 0.$$

Exercice IV - Probabilités

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel est défini tous les évènements et variables aléatoires.
Dans un stand de tir, un tireur tente de crever des ballons. A chacun de ses tirs, il a la probabilité $\frac{1}{5}$ de crever le ballon.

On suppose que le tireur effectue 4 tirs en changeant de ballon à chaque tir. On note X le nombre de ballons qui ont été crevés.

1. Préciser la loi de X.
2. Préciser l'espérance et la variance de X.
3. Préciser la probabilité que deux ballons exactement aient été crevés.
4. Calculer la probabilité qu'au moins trois ballons aient été crevés.

On suppose maintenant que le tireur se concentre sur un unique ballon et effectue des tirs successifs sur le même ballon afin de le crever. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement : « le tireur crève le ballon au tir k » et $\overline{A_k}$ l'évènement contraire : « le tireur rate le ballon au tir k ».

5. Exprimer en fonction des A_k (ou $\overline{A_k}$), l'évènement A : « le ballon n'a pas été crevé au bout de deux premiers tirs ».
6. Calculer la probabilité de A.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose B_n l'évènement « n tirs (ou moins) ont suffit pour crever le ballon ».

7. Exprimer l'évènement contraire $\overline{B_n}$ en fonction des A_k (ou $\overline{A_k}$).
8. En déduire la probabilité de B_n et préciser sa limite quand n tend vers $+\infty$.
9. Montrer que pour obtenir $\mathbb{P}(B_n) > 0,99$ il faut et il suffit de prendre $n > \frac{2\ln(10)}{\ln(5)-\ln(4)}$.

On suppose désormais le protocole suivant : le tireur lance dans un premier temps un dé tétraédrique (à 4 faces) dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note Y le numéro de la face obtenue. Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, si $Y = k$ alors le tireur a alors droit à k tirs sur le même ballon. On suppose le dé équilibré. On note C l'évènement « le ballon a été crevé à l'issu des k tirs »

10. Calculer la probabilité de réaliser C. *Un arbre pondéré sera le bienvenu.*