# Correction du Devoir Maison 0 Révisions de terminale d'après baccalauréat 2006

*Du jeudi 2 septembre*

## Exercice I - Géométrie

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les points

$$A\,(2,4,1)\,,\ B\,(0,4,-3)\,,\ C\,(3,1,-3)\,,\ D\,(1,0,-2)\,,\ E\,(3,2,-1)\,,\ I\left(\frac{3}{5},4,-\frac{9}{5}\right).$$

1. (a) Montrons que $\vec{n}\,(2,2,-1)$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$.
On a

$$\overrightarrow{AB}\,(0-2,4-4,-3-1)=(-2,0,-4) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\,(3-2,1-4,-3-1)=(1,-3,-4)\,.$$

On observe donc que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et de plus ces deux vecteurs sont des vecteurs directeurs de $(ABC)$. Donc pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à $(ABC)$, il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Calculons leurs produits scalaires. On a

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{AB}\right\rangle &= \langle (2,2,-1)\,,(-2,0,-4)\rangle = -4+0+4=0\\ \left\langle \vec{n}, \overrightarrow{AC}\right\rangle &= \langle (2,2,-1)\,,(1,-3,-4)\rangle = 2-6+4=0.\end{aligned}$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Conclusion,

$$\boxed{\vec{n}\,(2,2,-1) \text{ est un vecteur normal au plan } (ABC).}$$

(b) Déterminons une équation cartésienne du plan $(ABC)$.
Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $M\,(x,y,z)$ un point du plan. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M\in(ABC) \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}\perp\vec{n}\\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \langle (x-2,y-4,z-1)\,,(2,2,-1)\rangle\\ &\Leftrightarrow \quad 2x-4+2y-8-z+1=0\\ &\Leftrightarrow \quad 2x+2y-z=11.\end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne du plan $(ABC)$ est donnée par

$$\boxed{(ABC)\ :\quad 2x+2y-z=11.}$$

2. (a) Cherchons $H$ le projeté orthogonal de $D$ sur $(ABC)$.

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $H\,(x, y, z)$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& H \text{ projeté orthogonal de } D \text{ sur } (ABC) \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} \overrightarrow{HD} \perp (ABC) \\ H \in (ABC) \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} \overrightarrow{HD} \text{ est colinéaire à } \vec{n} \\ 2x + 2y - z = 11 \quad \text{par la question précédente} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{HD} = \lambda\,\vec{n} \\ 2x + 2y - z = 11 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ (1 - x, 0 - y, -2 - z) = (2\,\lambda, 2\,\lambda, -\,\lambda) \\ 2x + 2y - z = 11 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} 1 - x = 2\,\lambda \\ -y = 2\,\lambda \\ -2 - z = -\,\lambda \\ 2x + 2y - z = 11 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 - 2\,\lambda \\ y = -2\,\lambda \\ z = \lambda - 2 \\ 2x + 2y - z = 11 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 - 2\,\lambda \\ y = -2\,\lambda \\ z = \lambda - 2 \\ 2\,(1 - 2\,\lambda)\,2\,(-2\,\lambda) - (\lambda - 2) = 11 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 - 2\,\lambda \\ y = -2\,\lambda \\ z = \lambda - 2 \\ 2 - 4\,\lambda - 4\,\lambda - \lambda + 2 = 11 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 - 2\,\lambda \\ y = -2\,\lambda \\ z = \lambda - 2 \\ -9\,\lambda = 7 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 - 2\left(-\frac{7}{9}\right) \\ y = -2\left(-\frac{7}{9}\right) \\ z = -\frac{7}{9} - 2 \\ \lambda = -\frac{7}{9} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} x = \frac{23}{9} \\ y = \frac{14}{9} \\ z = -\frac{25}{9}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, le projeté orthogonal de $D$ sur $(ABC)$ est donné par

$$\boxed{H\left(\frac{23}{9}, \frac{14}{9}, -\frac{25}{9}\right).}$$

(b) Calculons $d$ la distance de $D$ à $(ABC)$.
Par la question précédente, on a
$$d = HD.$$
Or les coordonnées de $\overrightarrow{HD}$ sont
$$\left(1-\frac{23}{9}, -\frac{14}{9}, -2+\frac{25}{9}\right) = \left(-\frac{14}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{7}{9}\right).$$
Ainsi,
$$d = \sqrt{\left(-\frac{14}{9}\right)^2 + \left(-\frac{14}{9}\right)^2 + \left(\frac{7}{9}\right)^2}.$$
*Surtout ne développez pas ! Un matheux factorise toujours lorsque c'est possible. Ici, on observe que* $7$ *et* $9$ *sont facteurs communs :*
$$d = \sqrt{\frac{7^2}{9^2}\left(2^2+2^2+1\right)} = \frac{7}{9}\sqrt{9} = \frac{7}{3}.$$
Conclusion, la distance de $D$ à $(ABC)$ vaut
$$\boxed{d = \frac{7}{3}.}$$

3. Déterminons si les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires ou non.
On a vu que $\overrightarrow{AB}\,(-2,0,-4)$ et de plus,
$$\overrightarrow{CD}\,(1-3, 0-1, -2+3) = (-2,-1,1).$$
Calculons leur produit scalaire :
$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right\rangle = 4+0-4 = 0.$$
Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Conclusion,
$$\boxed{\text{les droites } (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont orthogonales.}}$$

4. Déterminons des équations paramétriques de la droite $(CD)$.
On sait que $\overrightarrow{CD}\,(-2,-1,1)$ et $C\,(3,1,-3)$. Conclusion, des équations paramétriques de $(CD)$ sont données par
$$\boxed{(CD)\ :\ \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1-t \\ z = -3+t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.}$$

5. Déterminons si le point $I$ appartient à la droite $(AB)$ ou non.
On sait que $A\,(2,4,1)$ et $\overrightarrow{AB}\,(-2,0,-4)$. Donc des équations paramétriques de $(AB)$ sont données par
$$(AB)\ :\ \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 4 \\ z = 1-4t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$
Donc $I\left(\frac{3}{5}, 4, -\frac{9}{5}\right)$ appartient à $(AB)$ si et seulement si
$$\exists t\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} \frac{3}{5} = 2-2t \\ 4 = 4 \text{ ok} \\ -\frac{9}{5} = 1-4t \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \exists t\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} 2t = 2-\frac{3}{5} = \frac{7}{5} \\ 4t = 1+\frac{9}{5} = \frac{14}{5} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \exists t\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} t = \frac{7}{10} \\ t = \frac{7}{10}. \end{cases}$$

Un tel $t$ existe. Conclusion,

$$\boxed{\text{le point } I \text{ appartient à la droite } (AB).}$$

## Exercice II - Analyse

Soit $f$ la fonction définie par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\,\mathrm{e}^{1-x} \end{array}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Calculons la limite de $f$ en $-\infty$. On a

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = -\infty.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^u = +\infty$. Donc par composée,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{1-x} = +\infty.$$

Dès lors, par produit,

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^{1-x} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

2. (a) Calculons la limite de $f$ en $+\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{1-x} = x^2\,\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}\,x^2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Or par croissance comparée, on sait que

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Donc par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}\,x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

(b) De la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{\text{le graphe } \mathscr{C} \text{ de } f \text{ présente une asymptote horizontale d'équation } y = 0 \text{ en } +\infty.}$$

3. Montrons que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons sa dérivée.

Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 1-x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée, $x \mapsto \mathrm{e}^{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{1-x} - x^2\,\mathrm{e}^{1-x} = (2-x)\,x\,\mathrm{e}^{1-x}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (2-x)\,x\,\mathrm{e}^{1-x}.}$$

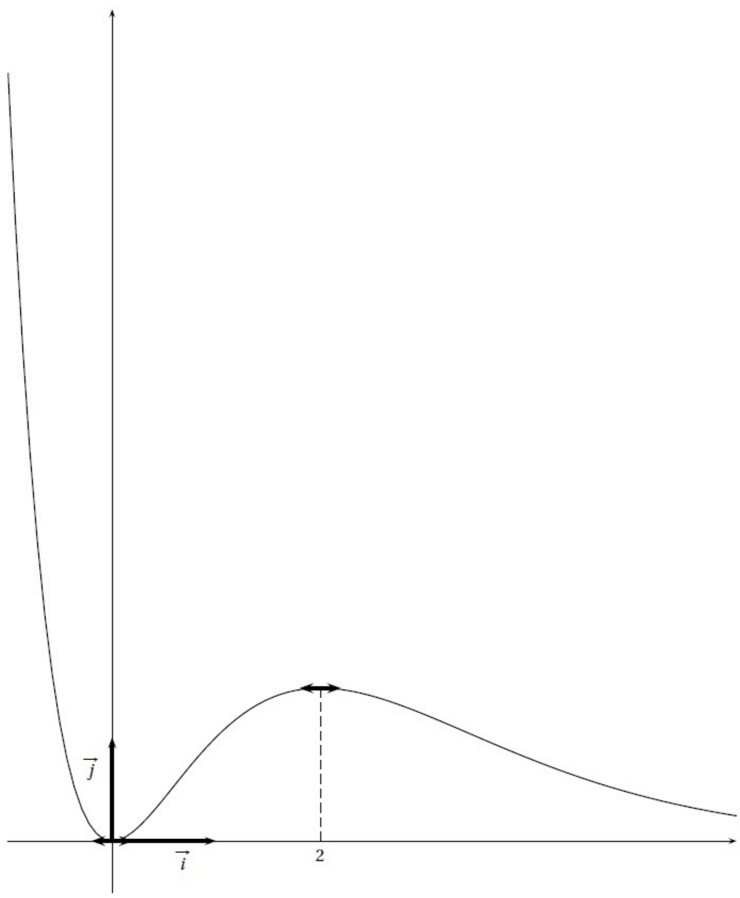
4. Dressons le tableau de variations de $f$ et traçons la courbe $\mathscr{C}$.
   Commençons par le signe de $f'(x)$. On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\mathrm{e}^{1-x}$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

De plus par les questions précédentes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. D'autre part, $f(0) = 0$ et $f(2) = 4\,\mathrm{e}^{-1}$. Conclusion, le tableau de variations de $f$ est donné par

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{\mathrm{e}}$ | $\searrow$ | $0$ |

On obtient alors le graphe suivant :



Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{1-x} \, \mathrm{d}x.$$

5. Calculons $I_1$ à l'aide d'une intégration par parties.

   Par définition, on a

   $$I_1 = \int_0^1 x \, \mathrm{e}^{1-x} \, \mathrm{d}x.$$

   Posons pour tout $x \in [0;1]$,

   $$\forall x \in [0;1], \quad \begin{cases} u(x) = -\mathrm{e}^{1-x} \\ v(x) = x. \end{cases}$$

   Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $[0;1]$ et

   $$\forall x \in [0;1], \quad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{1-x} \\ v'(x) = 1. \end{cases}$$

   Donc par intégration par parties,

   $$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x \, \mathrm{e}^{1-x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 u'(x) v(x) \, \mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \left[-x \, \mathrm{e}^{1-x}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -\mathrm{e}^{1-x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^0 + 0 + \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x} \, \mathrm{d}x \\ &= -1 + \left[-\mathrm{e}^{1-x}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -1 - \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1 \\ &= \mathrm{e} - 2. \end{aligned}$$

   *On observe bien que le résultat est positif, ce qui est cohérent avec le fait que* $x \mapsto x \, \mathrm{e}^{1-x}$ *est toujours positive sur* $[0;1]$.

   Conclusion,

   $$\boxed{I_1 = \mathrm{e} - 2.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, déterminons une relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$.

   Posons

   $$\forall x \in [0;1], \quad \begin{cases} u(x) = -\mathrm{e}^{1-x} \\ v(x) = x^{n+1}. \end{cases}$$

   Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $[0;1]$ et

   $$\forall x \in [0;1], \quad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{1-x} \\ v'(x) = (n+1) \, x^n. \end{cases}$$

Dès lors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{1-x}\,x^{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -\mathrm{e}^{1-x}\,(n+1)\,x^n\,\mathrm{d}x \\ &= -1+0+(n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= (n+1)\,I_n - 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = (n+1)\,I_n - 1.}$$

7. Calculons $I_2$.

   Par la question précédente, en prenant $n = 1$, on obtient,

   $$I_2 = 2I_1 - 1.$$

   Donc par la question 5.

   $$I_2 = 2\,(\mathrm{e}-2) - 1 = 2\,\mathrm{e}-5.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{I_2 = 2\,\mathrm{e}-5.}$$

8. Interprétons.

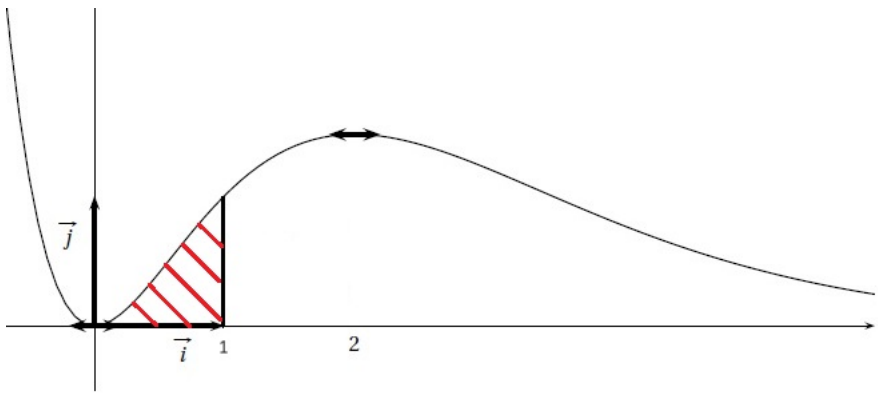
   Par définition,

   $$I_2 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Donc

   $$\boxed{\text{le nombre } I_2 \text{ représente l'aire sous la courbe } \mathscr{C} \text{ entre les abscisses 0 et 1.}}$$

   On obtient la zone hachurée en rouge suivante :




9. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in [0;1]$, on a $x^n \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto 1-x$ est décroissante sur $[0;1]$ et la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{1-x}$ est décroissante sur $[0;1]$ *(on pouvait aussi déterminer le signe de sa dérivée si besoin)*. Donc

   $$\forall x \in [0;1], \quad h(0) \geqslant h(x) \geqslant h(1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in [0;1], \quad \mathrm{e} \geqslant \mathrm{e}^{1-x} \geqslant 1.$$

   De plus pour tout $x \in [0;1]$, $x^n \geqslant 0$. Donc on ne change pas le sens de l'inégalité en multipliant par $x^n$ *(important!!)*. Conclusion,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], \quad x^n \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}\,.}$$

10. Déterminons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un encadrement de $I_n$ puis la limite de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente,

$$\forall x \in [0;1]\,, \quad x^n \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}\,.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens *(important aussi ! !)*, on obtient

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x.$$

Or, on a

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient aussi

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.}$$

Or on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes), on en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et de plus,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

# Exercice III - Complexes (introduction)

On définit $i$ un nombre vérifiant l'égalité $i^2 = -1$ et on admet l'existence d'un tel nombre. On appelle *complexe* tout nombre $z$ s'écrivant sous la forme $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ deux **réels**. Le réel $a$ est alors appelé *la partie réelle* de $z$ : $\mathrm{Re}(z) = a$ et le réel $b$ est alors appelé *la partie imaginaire* de $z$ : $\mathrm{Im}(z) = b$. On note $\mathbb{C} = \left\{ a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ l'ensemble des complexes. On dit qu'un complexe $z = a + ib$ est réel si et seulement sa partie imaginaire est nulle $b = 0$. Dans ce cas, $z = a$ et on obtient alors bien $z \in \mathbb{R}$. On observe donc en particulier que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1. Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes avec $a, b, a', b'$ quatre réels.

   (a) Calculons $z_1 = z + z'$ et précisons sa partie réelle et sa partie imaginaire.
   Par définition, on a
   $$z_1 = z + z' = a + ib + a' + ib' = \left(a + a'\right) + i\left(b + b'\right).$$
   Posons $a_1 = a + a'$ et $b_1 = b + b'$. Alors on a bien $a_1$ et $b_1$ deux réels et $z_1 = a_1 + ib_1$. Conclusion,
   $$\boxed{z_1 = \left(a + a'\right) + i\left(b + b'\right) \quad \text{et } \mathrm{Re}(z_1) = a + a', \quad \mathrm{Im}(z_1) = b + b'.}$$

   (b) Calculons $z_2 = zz'$ et précisons sa partie réelle et sa partie imaginaire.
   Comme dans la question précédente, on a
   $$\begin{aligned} z_2 = zz' &= (a + ib)\left(a' + ib'\right) \\ &= aa' + aib' + iba' + ibib' \\ &= aa' + i\left(ab' + a'b\right) + i^2 bb'. \end{aligned}$$
   Or par construction $i^2 = -1$. Donc
   $$z_2 = aa' + i\left(ab' + a'b\right) - bb' = \left(aa' - bb'\right) + i\left(ab' + a'b\right).$$
   Posons $a_2 = aa' - bb'$ et $b_2 = ab' + a'b$. Alors $a_2$ et $b_2$ sont bien deux réels et on a $z_2 = a_2 + ib_2$. Conclusion,
   $$\boxed{z_2 = \left(aa' - bb'\right) + i\left(ab' + a'b\right) \quad \text{et } \mathrm{Re}(z_2) = aa' - bb', \quad \mathrm{Im}(z_2) = ab' + a'b.}$$

2. On suppose que $a$ et $b$ ne sont pas tous les deux nuls. Calculons $z_3 = \frac{1}{z}$ et préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
   On a
   $$z_3 = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}.$$
   Donc
   $$\begin{aligned} z_3 &= \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} \\ &= \frac{a - ib}{a^2 - iab + iab - i^2 b^2} \\ &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \qquad \text{car } i^2 = -1 \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$
   Posons $a_3 = \frac{a}{a^2+b^2}$ et $b_3 = -\frac{b}{a^2+b^2}$. On observe que $a_3$ et $b_3$ sont bien deux réels et $z_3 = a_3 + ib_3$. Conclusion,
   $$\boxed{z_3 = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}. \quad \text{et } \mathrm{Re}(z_3) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \mathrm{Im}(z_3) = -\frac{b}{a^2 + b^2}.}$$

Pour tout complexe $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ deux réels, on définit le complexe $\overline{z} = a - ib$ de partie réelle $a$ et de partie imaginaire $-b$. Le complexe $\overline{z}$ est appelé *le conjugué* de $z$. Pour tout complexe $z$ non nul (autrement dit avec $a$ et $b$ non tous les deux nuls), on pose

$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}}.$$

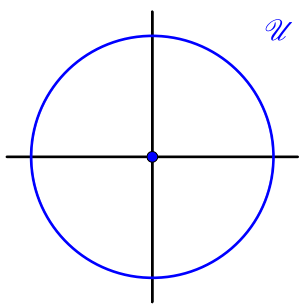
3. Soit $z = a + ib$ un complexe. Déterminons la partie réelle et imaginaire de $f(z)$ et vérifions qu'il existe un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = kz$.

   Par définition,
$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a - ib}.$$
   On multiplie cette fois-ci par $a + ib$ (car $a + ib \neq 0$ car $a$ et $b$ non tous les deux nuls) :
$$\begin{aligned} f(z) = \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} &= \frac{a+ib}{a^2 - i^2 b^2} \qquad \text{par l'identité remarquable} \\ &= \frac{a+ib}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\boxed{\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \operatorname{Im}(f(z)) = \frac{b}{a^2+b^2}.}$$
   De plus, en posant $k = \frac{1}{a^2+b^2}$, on observe que $\boxed{k \in \mathbb{R}}$ (et même $k \in \mathbb{R}_+^*$) et
$$\boxed{f(z) = kz.}$$

4. On pose $\mathbb{U} = \left\{ z = a + ib \in \mathbb{C} \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\}$.

   (a) Soit $z = a + ib$ un complexe non nul. Montrons que $f(z) = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$.
   Par la question précédente, avec $k = \frac{1}{a^2+b^2}$ on a
$$\begin{aligned} f(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad kz = z \quad &\Leftrightarrow \quad k = 1 \qquad \text{car } z \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a^2+b^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{U}.}$$

   (b) Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan. L'ensemble $\mathscr{U} = \{ M(a,b) \in \mathscr{P} \mid a + ib \in \mathbb{U} \}$ est le cercle unité : le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 1 :



5. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; i\}$ un complexe différent de 0, 1 et de $i$. Montrons que $\frac{f(z)-1}{f(z)-i} = -i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$.
D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(z)-1}{f(z)-i} &= \frac{\frac{1}{\overline{z}}-1}{\frac{1}{\overline{z}}-i} \\
&= \frac{1-\overline{z}}{1-i\overline{z}} \\
&= \frac{1-(a-ib)}{1-i(a-ib)} \\
&= \frac{1-a+ib}{1-ia+i^2b} \\
&= \frac{1-a+ib}{1-b-ia}.
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque le conjugué du quotient vaut le quotient des conjugués, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)} &= -i\frac{\overline{z-1}}{\overline{z-i}} \\
&= \frac{1}{i}\frac{\overline{a-1+ib}}{\overline{a+i(b-1)}} \\
&= \frac{1}{i}\frac{a-1-ib}{a-i(b-1)} \\
&= -\frac{1-a+ib}{ia-i^2(b-1)} \\
&= -\frac{1-a+ib}{ia+b-1} \\
&= \frac{1-a+ib}{1-b-ia}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}, \quad \frac{f(z)-1}{f(z)-i} = \frac{1}{i}\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}.}$$

6. Soit $Z \in \mathbb{C}$, montrons que $Z = \overline{Z}$ si et seulement si $Z \in \mathbb{R}$.
Notons $a = \mathrm{Re}\,(Z)$ et $b = \mathrm{Im}\,(Z)$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
Z = \overline{Z} \quad &\Leftrightarrow \quad a + ib = \overline{a+ib} \\
&\Leftrightarrow \quad a + ib = a - ib \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = a \\ b = -b \end{cases} \quad \text{par unicité de l'écriture d'un complexe} \\
&\Leftrightarrow \quad b = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(Z) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad Z = a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $Z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{Z = \overline{Z} \quad \Leftrightarrow \quad Z \in \mathbb{R}.}$$

7. Déterminons l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; i\}$ tels que $\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; i\}$. Par la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{z-1}{z-i} = \overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{z-1}{z-i} = \frac{\overline{z-1}}{\overline{z-i}} \\
\Leftrightarrow\ & (z-1)\,\overline{z-i} = \overline{z-1}\,(z-i) \qquad \text{car } z \neq i \\
\Leftrightarrow\ & (z-1)\,(\overline{z}+i) = (\overline{z}-1)\,(z-i) \\
\Leftrightarrow\ & (a-1+ib)\,(a+i\,(1-b)) = (a-1-ib)\,(a+i\,(b-1)) \\
\Leftrightarrow\ & (a-1)\,a + i\,(a-1)\,(1-b) + iab - b\,(1-b) = (a-1)\,a + i\,(a-1)\,(b-1) - iab + b\,(b-1) \\
\Leftrightarrow\ & (a-1)\,a + i\,(a-1)\,(1-b) + iab - b\,(1-b) - (a-1)\,a - i\,(a-1)\,(b-1) + iab - b\,(b-1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2i\,(a-1)\,(1-b) + 2iab = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a-1)\,(1-b) + ab = 0 \\
\Leftrightarrow\ & a - ab - 1 + b + ab = 0 \\
\Leftrightarrow\ & a + b = 1.
\end{aligned}$$

On observe que $a = b = 0$ n'est pas solution mais $a = 1$, $b = 0$ si et $a = 0$, $b = 1$ aussi. Donc le complexe $0$ n'est pas solution mais il faut exclure $z = 1$ et $z = i$.

Conclusion l'ensemble des complexes solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{a + ib \mid a + b = 1\} \setminus \{1; i\}.}$$

*NB : la représentation graphique de cet ensemble est la droite d'équation $y = 1 - x$ privé des points $(1, 0)$ et $(0, 1)$.*

8. Vérifions que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; i\}$, on a $\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)-i}\right) = 0$.

   Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; i\}$. Supposons que $\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}$. Notons $x = \frac{z-1}{z-i}$ ce réel. Par la question 5. on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{f(z)-1}{f(z)-i} &= \frac{1}{i}\overline{x} = \frac{1}{i}x \qquad \text{car } x \in \mathbb{R} \\
&= \frac{i}{-1}x = 0 - ix.
\end{aligned}$$

   Or $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)-i}\right) = 0$. D'où

$$\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)-i}\right) = 0.$$

   Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)-i}\right) = 0$. Posons $b = \mathrm{Im}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)-i}\right)$. On a donc

$$\frac{f(z)-1}{f(z)-i} = 0 + ib = ib.$$

   Donc par la question 5.

$$\frac{1}{i}\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)} = ib \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)} = i^2 b = -b.$$

   On observe que pour tout $u \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{u}} = u$. Donc, en passant au conjugué,

$$\frac{z-1}{z-i} = \overline{-b} = -b.$$

Or $b$ est réel. Donc $\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)-i}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}.$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; i\}$,

$$\boxed{\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)-i}\right) = 0.}$$

# Exercice IV - Probabilités

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel est défini tous les évènements et variables aléatoires.
Dans un stand de tir, un tireur tente de crever des ballons. A chacun de ses tirs, il a la probabilité $\frac{1}{5}$ de crever le ballon.

On suppose que le tireur effectue 4 tirs en changeant de ballon à chaque tir. On note $X$ le nombre de ballons qui ont été crevés.

1. Déterminons la loi de $X$.

   On suppose que chaque tir est indépendant des précédents et qu'à chaque tir la probabilité de crever le ballon reste identique. Crever un ballon lors d'un tir est une expérience de Bernoulli : on a crever le ballon, ce qui compte pour 1, ou on n'a pas touché le ballon, ce qui compte pour 0. Dès lors la variable $X$ est la somme de 4 **mêmes** expériences de Bernoulli **indépendantes** dont la probabilité d'un succès est donné par $p = \frac{1}{5}$.

   *Les deux hypothèses en gras sont importantes.*

   Conclusion,

   $$\boxed{\text{la variable } X \text{ suit une loi binomiale de paramètre } n = 4 \text{ et } p = \frac{1}{5} : X \sim \mathscr{B}\left(4, \frac{1}{5}\right).}$$

2. Précisons l'espérance et la variance de $X$.

   Puisque $X$ suit une loi binomiale, on a

   $$\mathbb{E}(X) = np = \frac{4}{5} \text{ et } \mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{5}.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{4}{5} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{16}{5}.}$$

3. Calculons la probabilité que deux ballons exactement aient été crevés.

   On cherche donc $\mathbb{P}(X=2)$. Puisque $X \sim \mathscr{B}\left(4, \frac{1}{5}\right)$, on sait que

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2) &= \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} \\ &= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(1-\frac{1}{5}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2! \times 2!}\frac{1}{25}\left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ &= \frac{2 \times 3 \times 4}{4}\frac{1}{25} \times \frac{16}{5 \times 5} \\ &= 6 \times \frac{16}{125 \times 5} \\ &= \frac{96}{625}.\end{aligned}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\mathbb{P}(X=2) == \frac{96}{625}.}$$

   *Pas de résultat à virgule, nous faisons des maths pas de la physique...*

4. Calculons la probabilité qu'au moins trois ballons aient été crevés. On cherche donc $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$.

   Autrement dit on cherche la probabilité que 3 ou 4 ballons aient été crevés :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 3) = \mathbb{P}((X = 3) \cup (X = 4)) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \qquad \text{car l'union est disjointe.}$$

   Puisque $X \sim \mathscr{B}\left(4, \frac{1}{5}\right)$, on obtient

$$\mathbb{P}(X \geqslant 3) = \binom{4}{3}\frac{1}{5^3} \times \frac{4}{5} + \binom{4}{4}\frac{1}{5^4} \times 1 = 4 \times \frac{4}{625} + \frac{1}{625} = \frac{17}{625}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant 3) = \frac{17}{625}.}$$

On suppose maintenant que le tireur se concentre sur un unique ballon et effectue des tirs successifs sur le même ballon afin de le crever. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_k$ l'évènement : « le tireur crève le ballon au tir $k$ » et $\overline{A_k}$ l'évènement contraire : « le tireur rate le ballon au tir $k$ ».

5. Exprimons $A$ : « le ballon n'a pas été crevé au bout de deux premiers tirs » en fonction des $A_k$.

   Pour rater le ballon durant deux tirs, il faut avoir raté le ballon au tir 1 et au tire 2 autrement dit réaliser $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$. On a donc

$$\boxed{A = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.}$$

6. Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   Par la question précédente,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right).$$

   Or la réussite au tir 2 ne dépend pas de ce qui s'est passé au tir 1 : les évènements $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ sont indépendants. Conclusion,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{15}{25}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{15}{25}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $B_n$ l'évènement « $n$ tirs (ou moins) ont suffit pour crever le ballon ».

7. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction des $A_k$.

   Par définition, $\overline{B_n}$ est l'évènement « $n$ tirs n'ont pas suffit pour crever le ballon ». Autrement dit, le tireur a raté ses $n$ premiers tirs :

$$\boxed{\overline{B_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}.}$$

8. Calculons $\mathbb{P}(B_n)$ et précisons sa limite.

   On a

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B_n}\right).$$

   Donc par la question précédente,

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right).$$

De même qu'à la question 6. les évènements $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, ..., $\overline{A_n}$ sont indépendants. Donc

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{4}{5}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) = 1 - \frac{4^n}{5^n}.}$$

Or $-1 < \frac{4}{5} < 1$. Donc la suite géométrique $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 1.}$$

*Le tireur finira un jour ou l'autre par crever le ballon.*

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathbb{P}(B_n) > 0,99 \iff n > \frac{2\ln(10)}{\ln(5)-\ln(4)}$.
   Par les questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) > 0,99 \quad &\iff \quad 1 - \frac{4^n}{5^n} > 0,99 \\
&\iff \quad 0,01 > \left(\frac{4}{5}\right)^n \\
&\iff \quad \frac{1}{100} > \left(\frac{4}{5}\right)^n.
\end{aligned}$$

   Par la stricte croissance du logarithme sur $]0;+\infty[$,

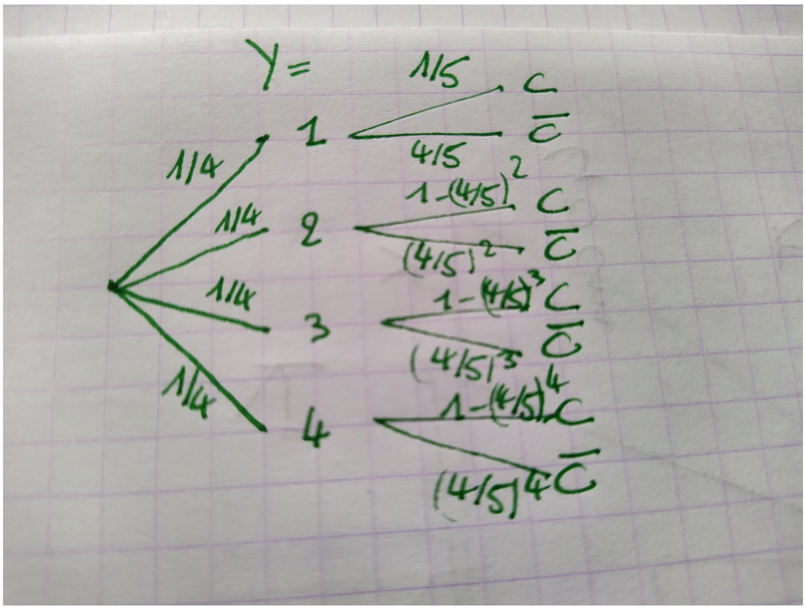
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) > 0,99 \quad &\iff \quad \ln\left(\frac{1}{100}\right) > \ln\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \\
&\iff \quad -\ln(100) > n\ln\left(\frac{4}{5}\right) \\
&\iff \quad -\ln\left(10^2\right) > n(\ln(4) - \ln(5)) \\
&\iff \quad -\frac{2\ln(10)}{\ln(4)-\ln(5)} < n \qquad \text{car } \ln(4) - \ln(5) < 0 \\
&\iff \quad \frac{2\ln(10)}{\ln(5)-\ln(4)} < n.
\end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) > 0,99 \quad \iff \quad n > \frac{2\ln(10)}{\ln(5)-\ln(4)}.}$$

On suppose désormais le protocole suivant : le tireur lance dans un premier temps un dé tétraédrique (à 4 faces) dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note $Y$ le numéro de la face obtenue. Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, si $Y = k$ alors le tireur a alors droit à $k$ tirs sur le même ballon. On suppose le dé équilibré. On note $C$ l'évènement « le ballon a été crevé à l'issu des $k$ tirs »

10. Calculons la probabilité de $C$. On a l'arbre pondéré suivant :




*Un arbre est toujours une bonne idée mais jamais une preuve.* On observe que le dé ne peut que faire 1, 2, 3 ou 4 et jamais deux de ces nombres à la fois. On dit que $(Y = k)_{k \in [\![1;4]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \mid Y = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(C \mid Y = 2)\,\mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(C \mid Y = 3)\,\mathbb{P}(Y = 3) + \mathbb{P}(C \mid Y = 4)\,\mathbb{P}(Y = 4).$$

Puisque le dé est équilibré, on a

$$\forall k \in [\![1;4]\!], \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{4}.$$

*On dit que $Y$ suit une loi uniforme : $Y \sim \mathscr{U}([\![1;4]\!])$.* De plus, si $Y = 1$, alors le tireur n'a qu'un essai qu'il réussit avec une probabilité $1/5$ :

$$\mathbb{P}(C \mid Y = 1) = \frac{1}{5}.$$

Si $Y = 2$, le tireur a deux essais. Sa probabilité de réussir vaut alors

$$\mathbb{P}(C \mid Y = 2) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C} \mid Y = 2).$$

La probabilité d'échouer avec deux tentatives est la probabilité d'échouer aux deux tentatives. Les tentatives étant indépendantes,

$$\mathbb{P}(\overline{C} \mid Y = 2) = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^2.$$

D'où

$$\mathbb{P}(C \mid Y = 2) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2.$$

Par le même raisonnement, on obtient

$$\mathbb{P}(C \mid Y = 3) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(C \mid Y = 4) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{5}+1-\left(\frac{4}{5}\right)^2+1-\left(\frac{4}{5}\right)^3+1-\left(\frac{4}{5}\right)^4\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(4-\left(\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{5}\right)^4\right)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(5-\left(1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{5}\right)^4\right)\right).\end{aligned}$$

Or, petite astuce, on a cette petite formule (somme d'une suite géométrique) pour $q \neq 1$,

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{1}{4}\left(5-\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^5}{1-\frac{4}{5}}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(5-\frac{5^5-4^5}{5^4(5-4)}\right)\\ &= \frac{5^5-5^5+4^5}{4\times 5^4}\\ &= \frac{4^5}{4\times 5^4}\\ &= \frac{4^4}{5^4}\\ &= \frac{16\times 4\times 4}{25\times 5\times 5}\\ &= \frac{64\times 4}{125\times 5}\\ &= \frac{256}{625}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = \frac{256}{625}.}$$