Devoir Maison 1
Logique et fonctions

A faire pour le jeudi 26 septembre

Problème I - Logique et raisonnement

Partie 1 : Que B implique A me laisserait baba...

On note $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $M \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, on considère les prédicats suivants :

$$\begin{aligned} A(f,M) &: \quad \text{« la fonction } f \text{ est positive sur } [M;+\infty[\text{ »} \\ B(f,M) &: \quad \text{« la fonction } f \text{ est décroissante sur } [M;+\infty[\text{ »} \\ C(f,\ell) &: \quad \text{« la fonction } f \text{ tend vers } \ell \text{ en } +\infty \text{ »} \end{aligned}$$

On fixe $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $M \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Ecrire mathématiquement $A(f,M)$.
2. Ecrire mathématiquement la négation de $A(f,M)$.
3. Ecrire mathématiquement $B(f,M)$.
4. Ecrire mathématiquement la négation de $B(f,M)$.
5. On considère l'implication
$$d(f,M) : \quad \text{« } A(f,M) \Rightarrow B(f,M). \text{ »}$$
Enoncer la négation, la contraposée et la réciproque de $d(f,M)$ en fonction de $A(f,M)$, $\overline{A(f,M)}$, $B(f,M)$ et/ou $\overline{B(f,M)}$.
6. On pose également D : « $\forall (f,M) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R},\ (A(f,M) \Rightarrow B(f,M))$.
   (a) Enoncer la négation de D.
   (b) Montrer que D est fausse.
   (c) Montrer que la réciproque de $d(f,M)$ est fausse en général.
   (d) Que dire de la contraposée de $d(f,M)$ en général ?
7. On admet que $C(f,\ell)$ est donnée mathématiquement par
$$C(f,\ell) : \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [M;+\infty[, \quad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon .$$
Enoncer la négation de $C(f,\ell)$.
8. Déterminer un exemple de fonction f_1 vérifiant $A(f_1,0) \cap B(f_1,0) \cap C(f_1,0)$.
9. Déterminer un exemple de fonction f_2 vérifiant $A(f_2,0) \cap B(f_2,0) \cap C(f_2,1)$.
10. Traduire en français l'assertion suivante et donner le nom du théorème assurant sa véracité.
$$T : \quad \forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ (\exists M \in \mathbb{R},\ A(f,M) \cap B(f,M)) \Rightarrow (\exists \ell \in \mathbb{R},\ C(f,\ell)) .$$
11. Enoncer la négation de T.
12. Donner un exemple de fonction convergeant vers 0 en $+\infty$ mais qui n'est pas positive autrement dit une fonction f réalisant $\left(\forall M \in \mathbb{R}, \overline{A(f,M)}\right) \cap C(f,0)$.

Partie 2 : $\overline{\text{monotone}}$ = amusant

Dans cette partie, on veut montrer que l'assertion suivante est FAUSSE : « toute fonction positive et convergeant vers 0 est décroissante ». Autrement dit, on veut montrer l'assertion suivante :

$$S: \quad \exists f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ A(f,0) \cap C(f,0) \cap \left(\forall M \in \mathbb{R},\ \overline{B(f,M)}\right).$$

On pose $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}\sin^2(x)$.

13. Justifier que f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$.
14. Calculer la dérivée de f.

On admet que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\sin(x)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \sin(x)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

15. Montrer que h est π-périodique.
16. Montrer que h n'est ni paire ni impaire.
17. A l'aide d'un tableau de signe, déterminer le signe de $h(x)$ pour $x \in [0;\pi]$.
18. Soit $k \in \mathbb{Z}$. En déduire la **stricte** monotonie de f sur $\left[k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$.
19. Démontrer que S est vraie.

Problème II - Fonction réelle

On considère la fonction suivante $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2+x+1}{x-1}. \end{array}$ On note $\mathscr{G}_f$ le graphe de f.

1. Etudier la parité de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et calculer pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)$.
3. (a) Montrer que f admet deux points critiques i.e. qu'il existe deux réels α et β, $\alpha < \beta$ tels que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$.
   (b) Simplifier $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.
4. Déterminer le tableau de variations complet de f (on précisera les limites à toutes les bornes de l'ensemble de définition de f).
5. La fonction f admet-elle des extrema locaux ? globaux ? Si oui les préciser.
6. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation. Même question en $-\infty$.
7. Préciser également l'équation de l'asymptote verticale que possède $\mathscr{G}_f$.
8. Soit $m \in \mathbb{R}$. A l'aide du tableau de variations, déterminer le **nombre** de solutions de l'équation $f(x) = m$.
9. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
10. Sans justification, donner les images directes suivantes :

$$f([\beta;+\infty[)? \qquad f(]1;+\infty[)? \qquad f([0;2]\setminus\{1\})? \qquad f(\mathbb{R}\setminus\{1\})?$$

11. De même déterminer les images réciproques suivantes :

$$f^{-1}(\mathbb{R})? \qquad f^{-1}([f(\beta);+\infty[)? \qquad f^{-1}([0;2])? \qquad f^{-1}(\{7\})?$$