Devoir Maison 10
Intégration et probabilités

A faire pour le jeudi 22 mai

Problème I - Intégrale de Gauss

On souhaite calculer l'intégrale de Gauss donnée par $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F : \begin{array}{rl} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$, appelée intégrale de Wallis.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

On admet que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

2. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\forall x \geqslant 1$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}$ et en déduire que F est bornée.
4. En déduire que F converge en $+\infty$. On notera $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ cette limite. *C'est juste une notation.*
5. Justifier que pour tout $u \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+u) \leqslant u$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que
   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant F\left(\sqrt{n}\right).$$
   (b) A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$, en déduire que $\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant F\left(\sqrt{n}\right)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que
   $$F\left(\sqrt{n}\right) \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$
   (b) A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, en déduire que
   $$F\left(\sqrt{n}\right) \leqslant \sqrt{n} \int_0^B \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t,$$
   où $B \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$ sont à préciser.
   (c) En déduire que
   $$F\left(\sqrt{n}\right) \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$
8. Conclure sur la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Problème II - Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un urne possède $2n$ boules : n blanches et n noires. On vide l'urne en effectuant successivement n tirages en piochant simultanément deux boules à chaque tirage. On note alors

$$S_n : \text{« obtenir lors des } n \text{ tirages deux boules de couleur différente à chaque fois »}$$

et pour tout $k \in [\![1; n]\!]$,

$$A_k : \text{« obtenir deux boules de couleur différente lors du } k\text{-ième tirage. »}$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbb{P}(S_n)$.

Partie 1 : Tout ce qui peut arriver, finit toujours par arriver

1. Si $n = 1$, préciser p_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer S_n en fonction des A_k.
3. Justifier sans calcul que $\mathbb{P}(S_{n+1} \mid A_1) = \mathbb{P}(S_n)$.
4. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
5. Cette suite converge-t-elle ?

Partie 2 : Il n'y a que les deux premiers tirages qui coûtent

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

6. Combien y a-t-il de configurations possibles pour le premier tirage (les boules, y compris celles de même couleur, sont toutes supposées discernables).
7. En déduire $\mathbb{P}(A_1)$ et l'écrire comme le quotient de deux entiers.
8. Déterminer $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)$.

On introduit également les évènements B_1 : « obtenir deux boules blanches au premier tirage » et N_1 : « obtenir deux boules noires au premier tirage ».

9. Calculer $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(A_2 \mid B_1)$ et $\mathbb{P}(N_1)$, $\mathbb{P}(A_2 \mid N_1)$
10. Calculer $\mathbb{P}(A_2)$.
11. Les évènements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
12. Calculer la probabilité d'avoir obtenu deux boules de même couleur au premier tirage sachant que l'on a obtenu deux boules de même couleur au deuxième tirage.

Partie 3 : Y'a toujours une partie plus diff... rigolote !

Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on pose $B_k = \bigcap_{i\in[\![1;k]\!]} A_i$.

13. Montrer que pour tout $k \in [\![2; n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k \mid B_{k-1}) = \frac{n-k+1}{2n-2k+1}$.
14. Exprimer en fonction de $n!$, $(2n)!$ et 2^n les quantités
$$\prod_{k=1}^{n} (2k) \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$$
15. Montrer que $p_n = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.
16. Sachant que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n}$. En déduire un équivalent simple de p_n quand $n \to +\infty$ puis préciser sa limite.