Correction du Devoir Maison 10
Intégration et probabilités

Du jeudi 22 mai

Problème I - Intégrale de Gauss

On souhaite calculer l'intégrale de Gauss donnée par $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F: \begin{array}{rl} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$, appelée intégrale de Wallis.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $s = \frac{\pi}{2} - t$ i.e. $t = \frac{\pi}{2} - s$. La fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ est $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{d}s = -\,\mathrm{d}t$. Donc par ce changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - s\right)(-\,\mathrm{d}s) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right)\right)^n \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(s))^n\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.}$$

On admet que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

2. *Méthode 1* Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x < y$. Alors, par la relation de Chasles,

$$F(y) = \int_0^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t^2} > 0$ et $x < y$. Donc par croissance de l'intégrale $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. De plus si $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$, puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est une fonction continue et positive sur $[x; y]$ (non réduit à un singleton car $x < y$), on en déduit par le théorème de séparation de l'intégrale que pour tout $t \in [x; y]$, $\mathrm{e}^{-t^2} = 0$ ce qui est absurde. Donc $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \neq 0$ et donc $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t > 0$. Ainsi

$$F(y) > \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = F(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on en déduit que

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Méthode 2. La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc par le théorème fondamental de l'analyse, F est l'unique primitive de f s'annulant en 0. En particulier F est dérivable et $F' = f$ et donc F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

3. On observe que pour tout $t \geqslant 1$, $t^2 \geqslant t$ et donc $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Donc, par croissance de l'intégrale, pour tout $x \in [1;+\infty[$,

$$\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=1}^{x} = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}.$$

Donc par la relation de Chasles,

$$F(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}.$$

D'autre part, pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$. Donc par croissance de l'intégrale, car $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant F(x).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in [1;+\infty[, \qquad 0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}.}$$

En particulier

$$\forall x \in [1;+\infty[, \qquad 0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1} \qquad \leftarrow \text{ indépendant de } x.$$

Posons $M_1 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1}$. On sait également (cf question 1) que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc sur le **segment** $[0;1]$. Or toute fonction continue sur un segment est bornée. Donc F est bornée sur $[0;1]$: il existe en particulier une constante $M_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0;1]$,

$$F(x) \leqslant M_2.$$

De plus pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0$ donc par croissance de l'intégrale

$$\forall x \geqslant 0, \qquad F(x) \geqslant 0.$$

En posant $M = \max(M_1, M_2)$, on obtient au bilan que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant F(x) \leqslant M.$$

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+.}$$

4. Par ce qui précède, la fonction F est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de la limite monotone, on en déduit que F admet une limite finie dans $\mathbb{R}$ en $+\infty$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ existe dans } \mathbb{R}.}$$

On note alors

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

5. On pose pour tout $u \in \left]-1;+\infty\right[$, $g(u) = u - \ln(1+u)$. Pour tout $u \in \left]-1;+\infty\right[$, on a $u+1>0$ et donc g est bien définie sur $\left]-1;+\infty\right[$. De plus g est dérivable sur $\left]-1;+\infty\right[$ comme somme de deux fonctions qui le sont et

$$\forall u \in \left]-1;+\infty\right[, \qquad g'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}.$$

Pour tout $u \in \left]-1;+\infty\right[$, on a $1+u>0$ et donc pour tout $u \in \left]-1;0\right[$, $g'(u)<0$ et pour tout $u \in \left]0;+\infty\right[$, $g'(u)>0$. Enfin,

$$\lim_{u\to -1} g(u) = \lim_{u\to -1} u - \ln(1+u) = +\infty \qquad g(0)=0 \qquad \lim_{u\to+\infty} g(u) = \lim_{u\to+\infty} u - \ln(1+u) = +\infty.$$

par croissance comparée pour la dernière limite. Ainsi,

u	-1		0		$+\infty$
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que pour tout $u \in \left]-1;+\infty\right[$, $g(u) \geqslant 0$ i.e. $u - \ln(1+u) \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall u \in \left]-1;+\infty\right[, \ln(1+u) \leqslant u.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $t \in \left[0;\sqrt{n}\right[$. Alors $-\frac{t^2}{n} \in \left]-1;0\right]$. Donc $1-\frac{t^2}{n}>0$ et

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)}.$$

Et par la question précédente, puisque $u = -\frac{t^2}{n} \in \left]-1;0\right]$, $\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n}$ et par croissance de la fonction exponentielle,

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{n\left(-\frac{t^2}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-t^2}.$$

Si $t=0$ alors $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = 0^n = 0 \leqslant 1 = \mathrm{e}^{-t^2}$ et l'inégalité reste vrai (NB : ici $n \neq 0$). Ainsi,

$$\forall t \in \left[0;\sqrt{n}\right], \qquad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $0 \leqslant \sqrt{n}$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = F\left(\sqrt{n}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant F\left(\sqrt{n}\right).}$$

(b) Posons pour tout $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $t = \varphi(u) = \sqrt{n}\cos(u)$. La fonction φ est bien définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, de plus pour tout $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u = -\sqrt{n}\sin(u)\,\mathrm{d}u.$$

Enfin, on a $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow t \in [0; \sqrt{n}]$ et $t = \sqrt{n}\cos(u) \Leftrightarrow \cos(u) = \frac{t}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow u = \arccos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ car $\frac{t}{\sqrt{n}} \in [0; 1]$ et $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $n \neq 0$. Donc par le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \cos^2(u)\right)^n \left(-\sqrt{n}\sin(u)\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2(u)\right)^n \sin(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Donc par la question 1.,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

En utilisant la question précédente, on conclut que

$$\boxed{\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant F\left(\sqrt{n}\right).}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour tout $t \in [0; \sqrt{n}]$, on a $u = \frac{t^2}{n} \in [0; 1] \subset]-1; +\infty[$. Donc par la question 5., on a pour tout $t \in [0; \sqrt{n}]$

$$\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n} \quad \Rightarrow \quad -\frac{t^2}{n} \leqslant -\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad -t^2 \leqslant -n\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)$$

Par croissance de l'exponentielle puis de l'intégrale car $\sqrt{n} \geqslant 0$,

$$\forall t \in \left[0; \sqrt{n}\right], \qquad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

Conclusion,

$$\boxed{F\left(\sqrt{n}\right) \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.}$$

(b) Pour tout $u \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, posons $t = \varphi(u) = \sqrt{n}\tan(u)$. La fonction φ est bien définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $u \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u.$$

De plus on a $u \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow t \in [0; \sqrt{n}]$ et $t = \sqrt{n}\tan(u) \Leftrightarrow u = \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ car $u \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $n \neq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{n\tan^2(u)}{n}\right)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(u)\right)^{-n} \frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2(u)}\right)^{-n} \frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n}(u)\frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{F\left(\sqrt{n}\right) \leqslant \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u,}$$

ce qui répond à la question en prenant $\boxed{B = \frac{\pi}{4}}$ et $\boxed{p = n-1}$.

(c) Poursuivons. On a

$$\sqrt{n}W_{2n-2} = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(u)\,\mathrm{d}u$$

Or pour tout $u \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^{2(n-1)}(u) \geqslant 0$ et donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(u)\,\mathrm{d}u \geqslant 0$. Ainsi,

$$\sqrt{n}W_{2n-2} \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u \geqslant F\left(\sqrt{n}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{F\left(\sqrt{n}\right) \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.}$$

8. D'après l'énoncé, on a $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Donc

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2\,(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Autrement dit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc par passage à la limite sur le résultat de la question 6.b et par la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} F\left(\sqrt{n}\right) \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'autre part, on a également

$$\sqrt{n}W_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2\,(2n-2)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. A nouveau, par passage à la limite sur le résultat de la question 7.c et par la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} F\left(\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Par ces deux encadrements, on en déduit la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Problème II - Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remplit une urne avec $2n$ boules : n blanches et n noires. On vide l'urne en effectuant successivement n tirages en piochant simultanément deux boules à chaque tirage. On note alors

S_n : « pour une urne avec $2n$ boules, obtenir lors des n tirages deux boules de couleur différente à chaque fois »

et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

A_k : « obtenir deux boules de couleur différente lors du k-ième tirage. »

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbb{P}(S_n)$.

Partie 1 : Tout ce qui peut arriver, finit toujours par arriver

1. Si $n = 1$, l'urne ne possède que deux boules : 1 blanche et 1 noire et nous n'effectuons qu'un seul tirage qui retourne cette unique boule blanche et cette unique boule noire. Donc

$$\boxed{p_1 = 1.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour obtenir que des boules de couleur distinctes à chaque tirage, il faut et il suffit que ce soit le cas au premier tirage et au deuxième etc ainsi qu'au n-ième. Donc

$$\boxed{S_n = \bigcap_{k \in [\![1;n]\!]} A_k.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On regarde S_{n+1} sachant A_1 réalisé. Puisque l'on regarde S_{n+1} c'est que l'on considère une urne avec $2(n+1) = 2n+2$ boules. On suppose A_1 réalisé, nous avons donc obtenu deux boules de couleur différente lors du premier tirage. Sachant cela, il nous reste alors $2(n+1) - 2 = 2n$ boules et l'on doit dans tous les tirages suivants obtenir deux boules de couleur différente. Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{n+1} \mid A_1) = \mathbb{P}(S_n).}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note que pour réaliser S_{n+1}, il faut réaliser en premier lieu A_1 donc

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(S_{n+1}) = \mathbb{P}(S_{n+1} \cap A_1) = \mathbb{P}(S_{n+1} \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1).$$

Donc par la question précédente

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(S_n)\,\mathbb{P}(A_1) = p_n \mathbb{P}(A_1).$$

Or $\mathbb{P}(A_1) \leqslant 1$. Donc

$$p_{n+1} \leqslant p_n.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

5. En tant que probabilité, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geqslant 0$. Donc la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 0. De plus par la question précédente, cette suite est décroissante. Conclusion, par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{La suite } (p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

Partie 2 : Il n'y a que les deux premiers tirages qui coûtent

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

6. Lors du premier tirage, on pioche simultanément deux boules parmi $2n$ (car toutes les boules sont distinctes). Par conséquent, on a

$$\boxed{\binom{2n}{2} \text{ configurations possibles pour le premier tirage.}}$$

7. Pour obtenir deux boules de couleurs différentes lors du premier tirage, on choisit la boule blanche : n choix puis la boule noire : n choix également. Donc le nombre de configurations retournant deux boules de couleurs distinctes est de n^2. Puisque chaque combinaison de deux boules parmi les $2n$ est équiprobable, on en déduit que

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{n^2}{\binom{2n}{2}} = \frac{n^2}{\frac{(2n)!}{(2n-2)!2!}} = \frac{n^2}{\frac{(2n)(2n-1)}{2}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1) = \frac{n}{2n-1}.}$$

8. On a $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$. De plus si A_1 est réalisé, alors on a ôté une boule noire et une boule blanche de l'urne. Il nous reste donc $n-1$ boules noires et $n-1$ boules blanches. Dès lors piocher deux boules de couleurs différentes vaut de même qu'à la question précédente,

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{(n-1)^2}{\binom{2(n-1)}{2}} = \frac{n-1}{2(n-1)-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{n-1}{2n-3}.}$$

On introduit également les évènements B_1 : « obtenir deux boules blanches au premier tirage » et N_1 : « obtenir deux boules noires au premier tirage ».

9. on a $\binom{n}{2}$ façons de piocher deux boules blanches au premier tirages parmi les $\binom{2n}{2}$ configurations possibles. Donc

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n!}{(n-2)!2}\frac{(2n-2)!2}{(2n)!} = \frac{n(n-1)}{2}\frac{2}{(2n)(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}.$$

De plus, si B_1 est réalisé, alors il nous reste $n-2$ boules blanches et n boules noires. Alors il y a toujours $\binom{2n-2}{2}$ configurations possibles au deuxième tirage (on note que puisque $n \geqslant 2$, $2n-2 \geqslant 0$). Pour construire un tirage avec deux boules de couleurs différentes, on choisit une boule blanche : $n-2$ choix et une boule noire : n choix. Donc

$$\mathbb{P}(A_2 \mid B_1) = \frac{(n-2)\,n}{\binom{2n-2}{2}} = \frac{2(n-2)\,n}{(2n-2)(2n-3)} = \frac{(n-2)\,n}{(n-1)(2n-3)}.$$

De même, (par symétrie des hypothèses sur les couleurs)

$$\mathbb{P}(N_1) = \frac{n-1}{2(2n-1)} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A_2 \mid N_1) = \frac{(n-2)\,n}{(n-1)(2n-3)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{n-1}{2(2n-1)} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A_2 \mid B_1) = \mathbb{P}(A_2 \mid N_1) = \frac{(n-2)\,n}{(n-1)(2n-3)}.}$$

10. On observe que la famille (A_1, B_1, N_1) forme un système complet d'évènements (incompatibles). Donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid N_1)\,\mathbb{P}(N_1).$$

Donc par les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_2) &= \frac{n-1}{2n-3}\frac{n}{2n-1} + \frac{(n-2)\,n}{(n-1)\,(2n-3)}\frac{n-1}{2\,(2n-1)} + \frac{(n-2)\,n}{(n-1)\,(2n-3)}\frac{n-1}{2\,(2n-1)} \\
&= \frac{(n-1)\,n}{(2n-3)\,(2n-1)} + 2\frac{(n-2)\,n\,(n-1)}{(n-1)\,(2n-3)\,2\,(2n-1)} \\
&= \frac{(n-1)\,n}{(2n-3)\,(2n-1)} + \frac{(n-2)\,n}{(2n-3)\,(2n-1)} \\
&= \frac{n\,(n-1+n-2)}{(2n-3)\,(2n-1)} \\
&= \frac{n\,(2n-3)}{(2n-3)\,(2n-1)} \\
&= \frac{n}{2n-1}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_2) = \frac{n}{2n-1}.}$$

11. On sait que A_1 et A_2 sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. A l'aide des questions précédentes, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
A_1 \text{ et } A_2 \text{ sont indépendants} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{2n-3} = \frac{n}{2n-1} \\
&\Leftrightarrow \quad (n-1)\,(2n-1) = n\,(2n-3) \qquad \text{car } n \geqslant 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2n^2 - 3n + 1 = 2n^2 - 3n \\
&\Leftrightarrow \quad 1 = 0.
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant impossible, on conclut que

$$\boxed{\text{Les évènements } A_1 \text{ et } A_2 \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

12. On cherche $\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \mid \overline{A_2}\right)$. On a $\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right) \neq 0$. Puisque $\mathbb{P}_{\overline{A_2}}$ est une probabilité, on commence par noter que

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \mid \overline{A_2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A_1 \mid \overline{A_2}\right).$$

Or $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$, donc par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}\left(A_1 \mid \overline{A_2}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{A_2} \mid A_1\right)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)} = \frac{[1 - \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)]\,\mathbb{P}(A_1)}{1 - \mathbb{P}(A_2)}.$$

Donc par les questions précédentes,

$$\mathbb{P}\left(A_1 \mid \overline{A_2}\right) = \frac{\left[1 - \frac{n-1}{2n-3}\right]\frac{n}{2n-1}}{1 - \frac{n}{2n-1}} = \frac{(2n-3-n+1)\,n}{(2n-3)\,(2n-1-n)} = \frac{(n-2)\,n}{(2n-3)\,(n-1)}$$

Par suite,

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \mid \overline{A_2}\right) = 1 - \frac{(n-2)\,n}{(2n-3)\,(n-1)} = \frac{2n^2 - 5n + 3 - n^2 + 2n}{(2n-3)\,(n-1)} = \frac{n^2 - 3n + 3}{(2n-3)\,(n-1)}.$$

On note que le discriminant du numérateur est négatif et donc l'expression n'est pas factorisable.

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \mid \overline{A_2}\right) = \frac{n^2 - 3n + 3}{(2n-3)\,(n-1)}.}$$

Partie 3 : Y'a toujours une partie plus diff... rigolote !

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'urne remplie avec $2n$ boules. Dans ce cas, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $C_k = \bigcap_{i\in[\![1;k]\!]} A_i$. *On pourra observer $C_n = S_n$ mais que $C_{n-1} \neq S_{n-1}$, car pour C_{n-1} l'urne contient $2n$ boules tandis que pour S_{n-1} l'urne en contient que $2n-2$).*

13. Soit $k \in [\![2;n]\!]$. On suppose que C_{k-1} est réalisé i.e. à chaque tirage entre 1 et $k-1$, nous avons tiré une boule blanche et une boule noire. Donc à l'étape k, il nous reste $n-k+1$ boules blanches et $n-k+1$ boules noires. Alors le nombre de tirages possibles à l'étape k est de $\binom{2(n-k+1)}{2} = \frac{(2n-2k+2)(2n-2k+1)}{2} = (n-k+1)(2n-2k+1)$. Tandis que pour obtenir A_k, il nous faut tirer une boule blanche : $n-k+1$ choix et une boule noire : $n-k+1$ choix et donc $(n-k+1)^2$ choix pour obtenir A_k. Ainsi, chaque tirage de couple étant équiprobable, on obtient
$$\mathbb{P}(A_k \mid C_{k-1}) = \frac{(n-k+1)^2}{(n-k+1)(2n-2k+1)} = \frac{n-k+1}{2n-2k+1}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall k \in [\![2;n]\!], \qquad \mathbb{P}(A_k \mid B_{k-1}) = \frac{n-k+1}{2n-2k+1}.}$$

14. On a
$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = n!2^n.$$
De plus,
$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \prod_{\substack{1\leqslant p\leqslant 2n\\ p \text{ impair}}} p = \frac{\prod\limits_{1\leqslant p\leqslant 2n} p}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant p\leqslant 2n\\ p \text{ pair}}} p} = \frac{(2n)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}.$$
Donc par ce qui précède,
$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{n!2^n}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}(2k) = n!2^n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{n!2^n}.}$$

15. Par la question 2., on a $p_n = \mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$. Par la formule des probabilités composées, on a
$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \times \mathbb{P}(A_{n-1} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_1) \\ &= \mathbb{P}(A_n \mid C_{n-1}) \times \mathbb{P}(A_{n-1} \mid C_{n-2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_1). \end{aligned}$$
Donc par la question 13., on obtient que
$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n-n+1}{2n-2n+1} \times \frac{n-(n-1)+1}{2n-2(n-1)+1} \times \cdots \times \frac{n-2+1}{2n-2\times 2+1}\mathbb{P}(A_1) \\ &= 1 \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{2n-3}\frac{n}{2n-1} && \text{par la question 7.} \\ &= \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)} \\ &= \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!} && \text{par la question précédente.} \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\frac{2^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{2^n\,(2n-n)!n!}{(2n)!} = \frac{(n!)^2\,2^n}{(2n)!}.$$

Conclusion,

$$\boxed{p_n = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.}$$

16. Par la question précédente, on a

$$p_n = \frac{(n!)^2\,2^n}{(2n)!}.$$

Or $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n}$ et donc $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}\,\mathrm{e}^{-2n}$. Donc par quotient,

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{2n}\,(2\pi n)\,\mathrm{e}^{-2n}\,2^n}{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}\,\mathrm{e}^{-2n}} = \frac{n^{2n}\,(2\pi n)\,2^n}{2^{2n}n^{2n}2\sqrt{\pi n}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{2^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi n}}{2^n}} \quad \text{et donc par croissance comparée} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0}.$$