Devoir Maison 11
Représentation matricielle et couples de variables aléatoires

A faire pour le jeudi 12 juin

Problème I - Représentation matricielle

On se propose d'étudier sur $\mathbb{C}_3[X]$ l'application suivante :

$$f : P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k \mapsto f(P) = \sum_{k=0}^{3} a_{3-k} X^k.$$

On note $\mathscr{C} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.

Partie 1 : Prenons l'auto

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
3. Déterminer $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.

Partie 2 : L'art de transformer une antidiagonale en diagonale

4. Soit $P = (X-1)(X-2)^2$. Calculer $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(P))$.
5. Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_4)$.
6. En déduire que $\mathscr{B}_1 = \left(X^3+1, X^2+X\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$.
7. Préciser $\mathrm{rg}(A - I_4)$.
8. Déterminer $\mathrm{Im}(A - I_4)$ puis $\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$.
9. Déterminer $\mathrm{Ker}(A + I_4)$.
10. En déduire que $\mathscr{B}_2 = \left(X^3-1, X^2-X\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$.
11. Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$. Calculer $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$.
12. Calculer $\mathrm{rg}(P)$.
13. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
14. Justifier que $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}_3[X]$.
15. **(Question incontournable)** Calculer $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$. *Sans calculer de matrice de passage !*

Partie 3 : Je gère si j'ai g avant d'être âgé

Soit
$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$
On pose g l'endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ tel que $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

16. Calculer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$.
17. Calculer $g\left(X^2 + X\right)$.
18. Calculer $\mathrm{Im}\,(g)$.
19. Calculer $\mathrm{Ker}\,(g)$ *On pourra utiliser judicieusement la question précédente...*
20. Calculer $N = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(g)$.
21. Reconnaître alors l'endomorphisme g.

Problème II - Variables aléatoires

Un secrétaire doit joindre N personnes.

- Le premier jour il appelle ces N personnes, chacune ayant une probabilité $p \in]0;1[$ de répondre (et cette probabilité est indépendante des autres appels). On note alors X_1 le nombre de personnes qui ont répondu.
- Le deuxième jour, le secrétaire rappelle tous ceux qui n'ont pas répondu à son premier appel (mais ne rappelle pas ceux qui ont déjà répondu à son appel le premier jour). On suppose que chaque personne appelée présente toujours une probabilité p de répondre. On note alors X_2 le nombre de personnes qui ont répondu durant cette deuxième journée.
- Le secrétaire est tenace et rappelle le troisième jour tous ceux qui n'ont pas répondu les deux jours précédents et ainsi de suite...
- Il rappelle donc le jour n tous ceux qui n'ont pas répondu les $n-1$ jours précédents. Chacune de ces personnes a toujours une probabilité p de répondre à cet n-ième appel. On note alors X_n le nombre de personnes ayant répondu durant le jour n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note également Z_n le nombre TOTAL de personnes qui ont répondu durant les n premiers jours.

Partie 1 : ça commence par être en binôme avant de finir conjoints

1. (a) Quelle est la loi de X_1 ? Justifier.
   (b) En déduire son univers image, son espérance, sa variance et sa fonction génératrice.
2. Soit $i \in [\![0;N]\!]$.
   (a) Quelle est l'univers image de X_2 sachant $X_1 = i$?
   (b) Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = i$ et préciser $\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = i)$, pour $j \in [\![0;N]\!]$.
   (c) En déduire la loi conjointe de X_1 et X_2.

Partie 2 : N'espérez pas trop vite prendre votre indépendance

On suppose dans cette partie que $N = 2$ et que $p = \frac{1}{2}$.

3. Préciser $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$ et donner la loi conjointe de X_1 et X_2 dans un tableau.
4. Déterminer, en justifiant les calculs avec soin, la loi de X_2.
5. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
6. Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice de X_2.

Partie 3 : Le démon se cache dans le paramètre

On revient au cas général, où N est un entier naturel non nul quelconque et p un réel entre $]0;1[$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Exprimer Z_n en fonction de $X_1, \ldots, X_n$.
   (b) Préciser l'univers image de Z_n.
   (c) Pourquoi ne peut-on pas directement conclure que Z_n suit une loi binomiale ?
8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Z_n = 0)$.
   (b) Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$?
9. Montrer à l'aide de la question 2 que pour tout $(i,j) \in [\![0;N]\!]^2$,
$$\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i} (1-p)^{N-j} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
10. Soit $j \in [\![0;N]\!]$. En déduire que
$$\mathbb{P}(Z_2 = j) = p^j (1-p)^{2N-2j} \sum_{i=0}^{j} \binom{N-i}{j-i} \binom{N}{i} (1-p)^{j-i}.$$
11. Simplifier
$$\frac{\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}}{\binom{j}{i}}.$$
12. On pose $p_2 = p(2-p)$. Conclure que $Z_2 \sim \mathscr{B}(N, p_2)$.

Partie 4 : Notre bien aimé Tcheby

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Z_n) = Np_n$ et $\mathbb{V}(Z_n) = Np_n(1-p_n)$, où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels définie par récurrence par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = (1-p)\,p_n + p \qquad \text{et} \qquad p_1 = p.$$

13. Déterminer une expression de p_n en fonction de p et de $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varepsilon \in \left]0; \frac{1}{4N}\right[$.

14. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $1 - \varepsilon \leqslant p_n \leqslant 1$.
15. Montrer que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - Np_n| \geqslant \frac{1}{2} - N\varepsilon\right)$.
16. En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant 16N\varepsilon$.
17. En conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) = 1$.

On peut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \sim \mathscr{B}(N, p_n)$.