Correction du Devoir Maison 9
Représentation matricielle, variables aléatoires

Du jeudi 12 juin

Exercice I - Représentation matricielle

On se propose d'étudier sur $\mathbb{C}_3[X]$ l'application suivante :

$$f : P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k \mapsto f(P) = \sum_{k=0}^{3} a_{3-k} X^k.$$

On note $\mathscr{C} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.

Partie 1 : Prenons l'auto

1. Par définition, pour tout $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k \in \mathbb{C}_3[X]$, on a $f(P) = \sum_{k=0}^{3} a_{3-k} X^k \in \mathbb{C}_3[X]$. Donc f va bien de $\mathbb{C}_3[X]$ dans $\mathbb{C}_3[X]$. Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k \in \mathbb{C}_3[X]$, $Q = \sum_{k=0}^{3} b_k X^k \in \mathbb{C}_3[X]$. Posons $R = \sum_{k=0}^{3} c_k X^k = \lambda P + \mu Q$. Dès lors,
$$\sum_{k=0}^{3} c_k X^k = R = \lambda P + \mu Q = \lambda \sum_{k=0}^{3} a_k X^k + \mu \sum_{k=0}^{3} b_k X^k = \sum_{k=0}^{3} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k.$$
Donc par unicité des coefficients d'un polynôme, pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, $c_k = \lambda a_k + \mu b_k$. Par suite,
$$f(R) = \sum_{k=0}^{3} c_{3-k} X^k = \sum_{k=0}^{3} (\lambda a_{3-k} + \mu b_{3-k}) X^k = \lambda \sum_{k=0}^{3} a_{3-k} X^k + \mu \sum_{k=0}^{3} b_{3-k} X^k = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}_3[X].}$$

2. Soit $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k \in \mathbb{C}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(P) = 0_{\mathbb{C}_3[X]} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{3} a_{3-k} X^k = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![0;3]\!],\ a_{3-k} = 0 \qquad \text{par unicité des coefficients} \\
&\Leftrightarrow \quad a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad P = 0_{\mathbb{C}_3[X]}.
\end{aligned}$$
Donc $\operatorname{Ker}(f) = \left\{0_{\mathbb{C}_3[X]}\right\}$ et f est donc injective. Or f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ et $\mathbb{C}_3[X]$ est de dimension finie, donc f est bijective. Conclusion,
$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{C}_3[X].}$$
Il est facile de vérifier que $f \circ f = Id_{\mathbb{C}_3[X]}$ on sait même de plus que $f^{-1} = f$.

3. On note que $1 = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k$, avec $a_0 = 1$ et $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Donc

$$f(1) = \sum_{k=0}^{3} a_{3-k} X^k = a_3 + a_2 X + a_1 X^2 + a_0 X^3 = X^3.$$

Donc $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(1)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. De la même façon, on a

$$f(X) = X^2, \qquad f\left(X^2\right) = X, \qquad f\left(X^3\right) = 1.$$

Par conséquent,

$$A = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(\mathscr{C})) = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(X^3, X^2, X, 1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Partie 2 : L'art de transformer une antidiagonale en diagonale

4. Soit $P = (X-1)(X-2)^2$. Alors,

$$P = (X-1)\left(X^2 - 4X + 4\right) = X^3 - 4X^2 + 4X - X^2 + 4X - 4 = X^3 - 5X^2 + 8X - 4.$$

Donc,

$$U = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(P) = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dès lors,

$$Y = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(P)) = AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Conclusion,

$$\boxed{Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}.}$$

5. Soit $U = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
U \in \operatorname{Ker}(A - I_4) \quad &\Leftrightarrow \quad (A - I_4)\, U = 0_{\mathbb{C}^4} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{C}^4} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -x_1 + x_4 \\ -x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 - x_4 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{C}^4} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x_1 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_4 = x_1 \\ x_3 = x_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad U = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A - I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).}$$

6. On sait que $\operatorname{Ker}(A - I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ et $A - I_4 = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$. Ainsi,

$$\operatorname{Ker}\left(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right) = \operatorname{Vect}\left(X^4 + 1, X^3 + X^2\right).$$

Posons $\mathscr{B}_1 = \left(X^3 + 1, X^2 + X\right)$. Par ce qui précède, $\mathscr{B}_1$ engendre $\operatorname{Ker}\left(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$. De plus $\mathscr{B}_1$ est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc $\mathscr{B}_1$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_1 = \left(X^3 + 1, X^2 + X\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\left(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right).}$$

7. On sait que $\mathscr{B}_1' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ engendre $\operatorname{Ker}(A - I_4)$ et est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc $\mathscr{B}_1'$ est une base de $\operatorname{Ker}(A - I_4)$. Donc $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_4)) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_1') = 2$. Donc par le théorème du rang,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A - I_4) = \dim\left(\mathbb{C}^4\right) - \dim(\operatorname{Ker}(A - I_4)) = 4 - 2 = 2.}$$

8. On a
$$\operatorname{Im}(A-I_4)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\right).$$
Donc $\mathscr{B}_I=\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right)$ est une famille de vecteurs de $\operatorname{Im}(A-I_4)$. Or ces vecteurs sont non-colinéaires. Donc $\mathscr{B}_I$ est libre. De plus $\operatorname{Card}(\mathscr{B}_I)=2=\operatorname{rg}(A-I_4)=\dim(\operatorname{Im}(A-I_4))$. Donc $\mathscr{B}_I$ est une base de $\operatorname{Im}(A-I_4)$. Conclusion,
$$\boxed{\operatorname{Im}(A-I_4)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right).}$$
Puisque $A-I_4=\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$, on a
$$\boxed{\operatorname{Im}\left(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)=\operatorname{Vect}\left(1-X^3,X-X^2\right)=\operatorname{Vect}\left(X^3-1,X^2-X\right),}\qquad \begin{matrix}C_1\leftarrow -C_1\\C_2\leftarrow -C_2\end{matrix}.$$

9. On a les opérations élémentaires suivantes **sur les lignes** :
$$A+I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\mathscr{L}}{\sim}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}}_{=N}\qquad \begin{matrix}L_3\leftarrow L_3-L_2\\L_4\leftarrow L_4-L_1\end{matrix}.$$
Dès lors, $\operatorname{Ker}(A+I_4)=\operatorname{Ker}(N)$.

Soit $U=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^4$, on a
$$\begin{aligned}U\in\operatorname{Ker}(A+I_4)\quad&\Leftrightarrow\quad (A+I_4)U=0_{\mathbb{C}^4}\quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1+x_4=0\\x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+x_4=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1+x_4=0\\x_2+x_3=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_4=-x_1\\x_3=-x_2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad U=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\-x_2\\-x_1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A+I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right).}$$

10. Par la question précédente, on obtient que

$$\operatorname{Ker}\left(f+\operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right) = \operatorname{Vect}\left(1-X^3, X-X^2\right) = \operatorname{Vect}\left(X^3-1, X^2-X\right), \qquad \begin{matrix}C_1 \leftarrow -C_1\\ C_2 \leftarrow -C_2\end{matrix}.$$

Posons $\mathscr{B}_2 = \left(X^3-1, X^2-X\right)$. Par ce qui précède, $\mathscr{B}_2$ engendre $\operatorname{Ker}\left(f+\operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$. De plus $\mathscr{B}_2$ est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc $\mathscr{B}_2$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_2 = \left(X^3-1, X^2-X\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\left(f+\operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right).}$$

11. Posons $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 = \left(X^3+1, X^2+X, X^3-1, X^2-X\right)$ et $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. On a

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

12. Par opérations élémentaires, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(P) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} && \begin{matrix}C_3 \leftarrow \frac{C_1+C_3}{2}\\ C_4 \leftarrow \frac{C_2+C_4}{2}\end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} && \begin{matrix}C_1 \leftarrow C_1 - C_3\\ C_2 \leftarrow C_2 - C_4\end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}(I_4) && C_3 \leftrightarrow C_4\\
&= 4.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(P) = 4.}$$

13. Puisque $\operatorname{rg}(P) = 4$ et $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$, on en déduit que $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ est inversible. Or $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}_3[X].}$$

14. De plus, par ce qui précède, $\mathscr{B}_1$ est une base de $\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$ et $\mathscr{B}_2$ est une base $\operatorname{Ker}\left(f+\operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{C}_3[X]$. Conclusion, par le théorème de la base adaptée :

$$\boxed{\text{Les espaces } \operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right) \text{ et } \operatorname{Ker}\left(f+\operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{C}_3[X].}$$

15. **(Question incontournable)** Notons

$$e_1 = X^3+1, e_2 = X^2+X, e_3 = X^3-1, e_4 = X^2-X.$$

Alors, $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$, $\mathscr{B}_2 = (e_3, e_4)$. En particulier, $e_1 \in \operatorname{Ker}\left(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$ donc

$$0_{\mathbb{C}_3[X]} = \left(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)(e_1) = f(e_1) - e_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(e_1) = e_1.$$

Donc

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De même, $e_2 \in \operatorname{Ker}\left(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$ donc $f(e_2) = e_2$. Puis $e_3 \in \operatorname{Ker}\left(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$ donc $f(e_3) + e_3 = 0$ i.e. $f(e_3) = -e_3$ et enfin $e_4 \in \operatorname{Ker}\left(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_3[X]}\right)$ donc $f(e_4) = -e_4$. Conclusion,

$$\boxed{D = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Partie 3 : Je gère si j'ai g avant d'être âgé

Soit

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On pose g l'endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ tel que $B = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

16. On sait que $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. On effectue alors les opérations élémentaires

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{L_3 - L_2}{2} \\ L_4 \leftarrow \frac{L_4 - L_1}{2} \end{array} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftrightarrow L_4 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} I_4 \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_4 \end{array} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien que P est inversible et on obtient que

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On vérifie facilement que $PP^{-1} = I_4$.

17. Avec les notations précédentes, on observe que $e_2 = X^2 + X$ est le second vecteur de la famille $\mathscr{B}$. Donc on sait par définition de g que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(g(e_2))$ est la deuxième colonne de B :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(g(e_2)) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$g\left(X^2+X\right) = g(e_2) = \frac{1}{2}e_1 + e_2 - \frac{1}{2}e_3 - e_4 = \frac{X^3+1}{2} + X^2 + X - \frac{X^3-1}{2} - \left(X^2 - X\right) = 2X+1.$$

Conclusion,

$$\boxed{g\left(X^2+X\right) = 2X+1.}$$

18. Commençons par calculer $\mathrm{Im}(B)$. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(B) &= \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\3\\0\\3\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\3\\0\\3\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\-2\end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\1\\-2\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow \frac{2}{3}C_1 \\ C_2 \leftarrow 2C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{2}{3}C_3 \\ C_4 \leftarrow 2C_4 \end{array} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\1\\-2\end{bmatrix}\right) && C_1 = C_3 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_3 \leftarrow \frac{C_3+C_1}{4} \\ C_2 = C_3 \end{array} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow \frac{C_2-C_3}{2} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{array} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2 \ .
\end{aligned}$$

Dès lors, puisque $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(g)$, en notant toujours $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(g) &= \mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2, e_4) \\
&= \mathrm{Vect}\left(X^3 + 1 - \left(X^3-1\right), X^2+X, X^2-X\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(2, X^2+X, X^2-X\right).
\end{aligned}$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(g) &= \mathrm{Vect}\left(1, X^2+X, X^2\right) && C_1 \leftarrow \tfrac{1}{2}C_1 \\ & && C_3 \leftarrow \tfrac{C_2+C_3}{2} \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2\right) && C_2 \leftarrow C_2 - C_3\ .\end{aligned}$$

On reconnaît alors la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(g) = \mathbb{C}_2[X].}$$

19. *Méthode 1 : bien meilleure !* Par la question précédente, on a $\mathrm{rg}\,(g) = \dim(\mathrm{Im}\,(g)) = \dim(\mathbb{C}_2[X]) = 3$. Donc par le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(g)) = \dim(\mathbb{C}_3[X]) - \mathrm{rg}\,(g) = 4 - 3 = 1.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(g)$ est une droite vectoriel i.e. engendré par un vecteur non nul. Il nous suffit donc de trouver un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,(g)$. Or, on remarque que dans B les colonnes 1 et 3 sont identiques. Donc $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(B)$. Autrement dit, $e_1 - e_3 = X^3 + 1 - \left(X^3 - 1\right) = 2 \in \mathrm{Ker}\,(g)$. Donc $\mathrm{Vect}\,(1) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$ et $\dim(\mathrm{Vect}\,(1)) = 1 = \dim(\mathrm{Ker}\,(g))$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Vect}\,(1)\ .}$$

Méthode 2. Pour les bruto-calculophiles : commençons par calculer $\mathrm{Ker}\,(B)$. Soit $U = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
U \in \mathrm{Ker}\,(B) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{C}^4} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 - x_4 = 0\\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0\\ -x_2 + x_4 = 0\\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0\\ -x_2 + x_4 = 0\\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0\end{cases} && L_1 = -L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0\\ -x_2 + x_4 = 0\\ -4x_2 - 4x_4 = 0\end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0\\ -x_2 + x_4 = 0\\ -8x_4 = 0\end{cases} && L_3 \leftarrow -4L_2\ .
\end{aligned}$$

Donc

$$U \in \mathrm{Ker}\,(B) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 = -3x_3 \text{ i.e. } x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad U = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\mathrm{Ker}\,(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Dès lors, puisque $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(g)$, on obtient que

$$\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Vect}\,(-e_1 + e_3) = \mathrm{Vect}\left(-\left(X^3+1\right) + X^3 - 1\right) = \mathrm{Vect}\,(-2) = \mathrm{Vect}\,(1)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Vect}\,(1)\,.}$$

Franchement tout ça pour ça, vive la méthode 1 !

20. Soit $N = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(g)$. Par la formule de changement de base, et les questions précédentes,

$$\begin{aligned} N = PBP^{-1} &= P\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

21. Soit $Q = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Alors $U = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(Q) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$. Donc par la question précédente,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(g\,(Q)) = NU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$g(Q) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 = Q'$$

Ceci étant vrai pour tout $Q \in \mathbb{C}_3[X]$, on conclut

$$\boxed{\text{L'application } g \text{ est la dérivation sur } \mathbb{C}_3[X].}$$

Problème II - Variables aléatoires

Un secrétaire doit joindre N personnes.

- Le premier jour il appelle ces N personnes, chacune ayant une probabilité $p \in]0;1[$ de répondre (et cette probabilité est indépendante des autres appels). On note alors X_1 le nombre de personnes qui ont répondu.
- Le deuxième jour, le secrétaire rappelle tous ceux qui n'ont pas répondu à son premier appel (mais ne rappelle pas ceux qui ont déjà répondu à son appel le premier jour). On suppose que chaque personne appelée présente toujours une probabilité p de répondre. On note alors X_2 le nombre de personnes qui ont répondu durant cette deuxième journée.
- Le secrétaire est tenace et rappelle le troisième jour tous ceux qui n'ont pas répondu les deux jours précédents et ainsi de suite...
- Il rappelle donc le jour n tous ceux qui n'ont pas répondu les $n-1$ jours précédents. Chacune de ces personnes a toujours une probabilité p de répondre à cet n-ième appel. On note alors X_n le nombre de personnes ayant répondu durant le jour n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note également Z_n le nombre TOTAL de personnes qui ont répondu durant les n premiers jours.

Partie 1 : ça commence par être en binôme avant de finir conjoints

1. (a) Comme la variable aléatoire X_1 compte le nombre de succès après N appels. X_1 est donc la somme de
   - N épreuves de Bernoulli
   - de même paramètre
   - indépendantes.

   Conclusion,

   $$\boxed{X_1 \sim \mathscr{B}(N, p).}$$

   (b) On récite le cours,

   $$\boxed{X_1(\Omega) = [\![0; N]\!], \qquad \mathbb{E}(X_1) = Np, \qquad \mathbb{V}(X_1) = Np(1-p),}$$

   et sa fonction génératrice est donnée par

   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_{X_1}(t) = (1 - p + pt)^n.}$$

2. (a) Sachant que $X_1 = i$ (i.e. i personnes ont répondu le premier jour) et que le secrétaire ne rappelle au deuxième jour que les personnes n'ayant pas répondu le premier jour, il sera amené à rappeler $N - i$ personnes le deuxième jour.
   Comme X_2 désigne le nombre de personnes ayant répondu au deuxième jour, il vient que :

   $$\boxed{\text{l'univers image de } X_2 \text{ sachant } X_1 = i \text{ est } [\![0, N-i]\!].}$$

(b) Sachant que $X_1 = i$, la variable aléatoire X_2 compte le nombre de succès (personnes répondant à l'appel) après $N-i$ répétitions **indépendantes** d'une **même** épreuve de **Bernoulli** (N appels), il vient que la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = i$ est la loi binomiale de paramètres $N-i$ et p, à savoir $\mathscr{B}(N-i,p)$.
On en déduit alors que pour tout $j \in [\![0, N]\!]$:

$$\boxed{\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j} p^j (1-p)^{N-i-j} & \text{si } j \in [\![0, N-i]\!] \\ 0. & \text{sinon} \end{cases}}$$

(c) Posons $Z = (X_1, X_2)$. La loi conjointe $\mathbb{P}_{(X_1,X_2)}$ de Z est déterminée par la donnée de :

- $\boxed{Z(\Omega) = X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) = [\![0, N]\!]^2}$;
- puis, pour tout $(i, j) \in [\![0, N]\!]^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = (i,j)) &= \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = i) \\ &= \begin{cases} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \binom{N-i}{j} p^j (1-p)^{N-i-j} & \text{si } j \in [\![0, N-i]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![0;N]\!], \qquad \mathbb{P}(Z = (i,j)) = \begin{cases} \binom{N}{i}\binom{N-i}{j} p^{i+j} (1-p)^{2N-2i-j} & \text{si } j \in [\![0, N-i]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Partie 2 : N'espérez pas trop vite prendre votre indépendance

On suppose dans cette partie que $N = 2$ et que $p = \frac{1}{2}$.

3. Sachant que $j = 1 \in [\![0, N-i]\!] = [\![0, 2-1]\!]$, on obtient avec la formule précédemment établie que :

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) \quad = \quad \binom{2}{1}\binom{2-1}{1} \frac{1}{2^{1+1}} \frac{1}{2^{2\times 2 - 2\times 1 - 1}} = 2 \times 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4}.}$$

De même pour les autres valeurs, on obtient alors le tableau suivant :

X_2 \ X_1	0	1	2
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	0
2	$\frac{1}{16}$	0	0

4. La loi $\mathbb{P}_{X_2}$ de X_2 est entièrement déterminée par la donnée de $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. De plus, la famille $(X_1 = i)_{i \in [\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 0) &= \mathbb{P}((X_2 = 0) \cap (X_1 = 0)) + \mathbb{P}((X_2 = 0) \cap (X_1 = 1)) + \mathbb{P}((X_2 = 0) \cap (X_1 = 2)) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} \\ &= \frac{9}{16}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_2=1\right) &= \mathbb{P}((X_2=1)\cap(X_1=0))+\mathbb{P}((X_2=1)\cap(X_1=1))+\mathbb{P}((X_2=1)\cap(X_1=2))\\ &= \frac{2}{16}+\frac{4}{16}+0\\ &= \frac{6}{16}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_2=2\right) &= \mathbb{P}((X_2=2)\cap(X_1=0))+\mathbb{P}((X_2=2)\cap(X_1=1))+\mathbb{P}((X_2=2)\cap(X_1=2))\\ &= \frac{1}{16}+0+0\\ &= \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

La loi marginale de X_2 est donc donnée par *(on somme chaque ligne du tableau précédent)*

k	0	1	2
$\mathbb{P}\left(X_2=k\right)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

5. On remarque que :

$$\mathbb{P}((X_2=0)\cap(X_1=0))=\frac{1}{16}.$$

D'autre part, par la question précédente, $\mathbb{P}\left(X_2=0\right)=\frac{9}{16}$. D'autre part, par la question 2.c $X_1\sim\mathscr{B}\left(N,p\right)=\mathscr{B}\left(2,\frac{1}{2}\right)$ et donc $\mathbb{P}\left(X_1=0\right)=\binom{2}{2}\frac{1}{2^0}\frac{1}{2^{2-0}}=\frac{1}{4}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(X_2=0\right)\times\mathbb{P}\left(X_1=0\right)=\frac{9}{16}\times\frac{1}{4}\neq\frac{1}{16}=\mathbb{P}((X_2=0)\cap(X_1=0)).$$

Conclusion,

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

6. – *(Calcul de l'espérance de X_2)*
   On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2) &= \sum_{x_k\in X_2(\Omega)} x_k P(X_2=x_k)\\ &= \sum_{k=0}^{2} k\mathbb{P}\left(X_2=k\right)\\ &= 0\times\frac{9}{16}+1\times\frac{6}{16}+2\times\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

   – *(Calcul de la variance de X_2)*
   Par la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}\left(X_2\right)=\mathbb{E}\left(X_2^2\right)-\mathbb{E}\left(X_2\right)^2.$$

   Par le théorème de transfert et la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(X_2\right) &= \sum_{k=0}^{2} k^2\mathbb{P}\left(X_2=k\right)-\frac{1}{4}\\ &= 0\times\frac{9}{16}+1\times\frac{6}{16}+4\times\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

– *(Calcul de la fonction génératrice)*
Par définition et la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_2}(t) = \sum_{k=0}^{2} t^k \mathbb{P}(X_2 = k) = \frac{9+6t+t^2}{16}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{V}(X_2) = \frac{3}{8}, \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ G_{X_2}(t) = \frac{9+6t+t^2}{16}.}$$

Partie 3 : Le démon se cache dans le paramètre

On revient au cas général, où N est un entier naturel non nul quelconque et p un réel entre $]0;1[$.

7. (a) Par définition de Z_n, c'est le nombre total de personnes qui ont répondu durant les jours 1 à n et donc la somme sur k des personnes qui ont répondu le jour k. Il vient directement :

$$\boxed{Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$$

(b) Il est possible que malgré les N appels du secrétaire, personne ne lui réponde. Dans ce cas, $Z_n = 0$. Il est aussi possible que durant les n appels tout le monde ait répondu (y compris il est possible que tout le monde ait répondu dès le premier jour). Ainsi,

$$\boxed{Z_n(\Omega) = [\![0;n]\!].}$$

(c) Pffff toujours les mêmes questions. Puisque les X_i ne sont pas indépendantes (ni même a priori de même paramètre), $\boxed{\text{il n'est pas possible de conclure directement que } Z_n \text{ suit un loi binomiale}}$.

8. (a) On observe que $(Z_n = 0) = (X_1 = 0, \dots, X_n = 0)$. Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_1 = \dots = X_{n-1} = 0)& \\ \times \mathbb{P}(X_{n-1} = 0 \mid X_1 = \dots = X_{n-2} = 0)& \\ \times \dots \times \mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0)&.\end{aligned}$$

Sachant $(X_1 = \dots = X_{n-1} = 0)$ réalisé, aucune personne n'a répondu durant les $n-1$ premiers jours. Le (pauvre) secrétaire est donc obligé de rappeler tout le monde le jour n. On observe alors que sachant $(X_1 = \dots = X_{n-1} = 0)$ réalisé, la loi de X_n est une binomiale de paramètre (N,p). Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_1 = \dots = X_{n-1} = 0) = \binom{N}{0} p^0 (1-p)^N = (1-p)^N.$$

De même pour les autres probabilités y compris $\mathbb{P}(X_1 = 0) = (1-p)^N$, on obtient

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \underbrace{(1-p)^N \times \dots \times (1-p)^N}_{n \text{ fois}} = (1-p)^{nN}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n = 0) = (1-p)^{nN}.}$$

(b) Sachant que $p \in]0,1[$, il vient que $(1-p)^N \in]0,1[$. Ainsi, par convergence d'une suite géométrique de raison de module strictement inférieur à 1, il vient que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = 0.}$$

9. Soit $(i,j) \in [\![0,N]\!]^2$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) &= \mathbb{P}(X_1 + X_2 = j \mid X_1 = i) \\
&= \mathbb{P}(X_2 = j - i \mid X_1 = i) \\
&\underset{q2.(b)}{=} \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i}(1-p)^{N-j} & \text{si } 0 \leqslant j - i \leqslant N - i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i}(1-p)^{N-j} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_2 = j \ Z_1 = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i}(1-p)^{N-j} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

10. Sachant que la famille $(\{Z_1 = i\})_{i\in[\![0,N]\!]}$ forme un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales permet d'écrire les égalités entre réels suivantes pour tout $j \in [\![0,N]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_2 = j) &= \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(Z_1 = i)\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{j} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i}(1-p)^{N-j} \\
&= p^j (1-p)^{2N-2j} \sum_{i=0}^{j} \binom{N}{i}\binom{N-i}{j-i}(1-p)^{j-i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall j \in [\![0,N]\!],\ \mathbb{P}(Z_2 = j) = p^j(1-p)^{2N-2j} \sum_{i=0}^{j} \binom{N}{i}\binom{N-i}{j-i}(1-p)^{j-i}.}$$

11. On a les égalités entre entiers naturels suivantes :

$$\frac{\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}}{\binom{j}{i}} = \frac{\frac{(N-i)!}{(j-i)!(N-j)!} \times \frac{N!}{i!(N-i)!}}{\frac{j!}{i!(j-i)!}} = \frac{N!}{j!(N-j)!} = \binom{N}{j}$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}}{\binom{j}{i}} = \binom{N}{j}.}$$

12. On a les égalités entre réels suivantes pour tout $j \in [\![0, N]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_2 = j) &= p^j(1-p)^{2N-2j}\sum_{i=0}^{j}\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}(1-p)^{j-i} \\
&= \binom{N}{j}p^j(1-p)^{2N-2j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(1-p)^{j-i}\times 1^i \\
&\underset{\substack{\text{binôme}\\ \text{de Newton}}}{=} \binom{N}{j}p^j(1-p)^{2N-2j}((1-p)+1)^j \\
&= \binom{N}{j}(p(2-p))^j((1-p)^2)^{N-j} \\
&= \binom{N}{j}(p(2-p))^j(1-p(2-p))^{N-j} \\
&= \binom{N}{j}p_2^j(1-p_2)^{N-j}
\end{aligned}$$

Ainsi, $Z_2(\Omega) = [\![0, N]\!]$ et $\forall j \in [\![0; N]\!]$, $\mathbb{P}(Z_2 = j) = \binom{N}{j}p_2^j(1-p_2)^{N-j}$, autrement dit :

$$\boxed{Z_2 \sim \mathscr{B}(N, p_2).}$$

Partie 4 : Notre bien aimé Tcheby

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Z_n) = Np_n$ et $\mathbb{V}(Z_n) = Np_n(1-p_n)$, où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels définie par récurrence par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = (1-p)\,p_n + p \qquad \text{et} \qquad p_1 = p.$$

13. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. Pour déterminer son expression explicite, on procède de la manière suivante :

   - *Recherche du point fixe :*
     Résolvons l'équation $x = (1-p)x + p$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

     $$x = (1-p)x + p \iff (1-(1-p))x = p \underset{p\neq 0}{\iff} x = 1$$

   - *Suite pivot géométrique :*
     Montrons que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (p_n - 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison x.
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

     $$q_{n+1} = p_{n+1} - 1 = (1-p)p_n + p - 1 = (1-p)(p_n - 1) = (1-p)q_n$$

     Ainsi, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $1-p$ et sa forme explicite est donnée par :

     $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; q_n = (1-p)^{n-1}q_1 \underset{q_1 = p-1}{=} -(1-p)^n$$

   Enfin, sachant que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (q_n + 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il vient que :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; p_n = 1 - (1-p)^n.}$$

Soit $\varepsilon \in \left]0; \frac{1}{4N}\right[$.

14. Par la question précédente, puisque $1-p \in]0;1[$ *(important à préciser !)*, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-(1-p)^n = 1$. Donc puisque $\varepsilon > 0$, par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$|1-p_n| \leqslant \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad 1-\varepsilon \leqslant p_n \leqslant 1+\varepsilon\,.$$
Et puisque que de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 1-(1-p)^n \leqslant 1$. On en déduit que
$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0, \qquad 1-\varepsilon \leqslant p_n \leqslant 1.}$$

15. Soit $n \geqslant n_0$. Puisque $1-p<1$, $(1-p)^n < 1$ et donc $p_n > 0$. D'où
$$\begin{aligned}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) &= \left(N - Z_n + Np_n - Np_n \geqslant \frac{1}{2}\right)\\ &= \left(Np_n - Z_n + (1-p_n)\,N \geqslant \frac{1}{2}\right)\\ &= \left(Np_n - Z_n \geqslant \frac{1}{2} - (1-p_n)\,N\right).\end{aligned}$$
Or par la question précédente, $p_n \geqslant 1-\varepsilon$ donc $1-p_n \leqslant \varepsilon$, puisque $N>0$, $(1-p_n)\,N \leqslant \varepsilon\,N$ ou encore $\frac{1}{2} - (1-p_n)\,N \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\,N$. Donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(Np_n - Z_n \geqslant \frac{1}{2} - (1-p_n)\,N\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(Np_n - Z_n \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\,N\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}\left(|Np_n - Z_n| \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\,N\right)\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - Np_n| \geqslant \frac{1}{2} - N\,\varepsilon\right).}$$

16. Par l'énoncé, on sait que $\mathbb{E}(Z_n) = Np_n$. Donc
$$\mathbb{P}\left(|Z_n - Np_n| \geqslant \frac{1}{2} - N\,\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \geqslant \frac{1}{2} - N\,\varepsilon\right).$$
De plus, $\varepsilon < \frac{1}{4N}$. Donc $N\,\varepsilon < \frac{1}{4}$ et donc $\frac{1}{2} - N\,\varepsilon > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Ainsi,
$$\mathbb{P}\left(|Z_n - Np_n| \geqslant \frac{1}{2} - N\,\varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \geqslant \frac{1}{4}\right).$$
Donc par la question précédente,
$$\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \geqslant \frac{1}{4}\right).$$
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
$$\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Z_n)}{(1/4)^2} = 16\mathbb{V}(Z_n) = 16Np_n(1-p_n)\,.$$
Mais puisque $p_n \leqslant 1$ et $p_n \leqslant 1-\varepsilon$, on a $1-p_n \leqslant \varepsilon$ et donc
$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \qquad \mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant 16N\,\varepsilon\,.}$$

17. A N fixé, on a donc montré que pour tout $\varepsilon \left]0;\frac{1}{4N}\right[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant 16N\,\varepsilon$. Par définition même de la limite,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) &= \mathbb{P}\left(N - \frac{1}{2} \geqslant Z_n\right)\\ &= \mathbb{P}\left(N > Z_n\right) && \text{car } Z_n \text{ est à valeurs entières}\\ &= 1 - \mathbb{P}\left(Z_n = N\right) && \text{car } Z_n\left(\Omega\right) = [\![0;N]\!] \text{ par la question 7.b}\end{aligned}$$

Conclusion, $\left(\mathbb{P}\left(Z_n = N\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = N\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right)\right) = 1.}$$

Asymptotiquement, le secrétaire finit par avoir ses N interlocuteurs aussi résistants soient-ils.

On peut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \sim \mathscr{B}\left(N, p_n\right)$.