Correction du Devoir Maison 1
Logique et fonctions réelles

Du jeudi 26 septembre

Problème I - Logique et raisonnement

Partie 1 : Que B implique A me laisserait baba...

On note $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $M \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, on considère les prédicats suivants :

$$\begin{aligned} A(f,M) &: \quad \text{« la fonction } f \text{ est positive sur } [M;+\infty[\text{ »} \\ B(f,M) &: \quad \text{« la fonction } f \text{ est décroissante sur } [M;+\infty[\text{ »} \\ C(f,\ell) &: \quad \text{« la fonction } f \text{ tend vers } \ell \text{ en } +\infty \text{ »} \end{aligned}$$

On fixe $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $M \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. L'écriture mathématique de $A(f,M)$ est donnée par

$$\boxed{A(f,M) \ : \quad \forall x \in [M;+\infty[\,,\ f(x) \geqslant 0.}$$

2. L'écriture mathématique de la négation de $A(f,M)$ est alors

$$\boxed{\overline{A(f,M)} : \quad \exists x \in [M;+\infty[\,,\ f(x) < 0.}$$

3. L'écriture mathématique de $B(f,M)$ est donnée par

$$\boxed{B(f,M) \ : \quad \forall (x,y) \in [M;+\infty[^2,\ (x \leqslant y) \ \Rightarrow \ f(x) \geqslant f(y).}$$

4. L'écriture mathématique de la négation de $B(f,M)$ est alors

$$\boxed{\overline{B(f,M)} : \quad \exists (x,y) \in [M;+\infty[^2,\ (x \leqslant y) \ \text{ ET } \ (f(x) > f(y))\,.}$$

5. On considère l'implication

$$d(f,M) \ : \quad \text{« } A(f,M) \ \Rightarrow \ B(f,M). \text{ »}$$

Donnons la négation, la contraposée et la réciproque de $d(f,M)$.

La négation de $D(f,M)$ est

$$\boxed{\overline{d(f,M)} : \quad A(f,M) \ \text{ ET } \ \overline{B(f,M)}.}$$

La contraposée de $D(f,M)$ est

$$\boxed{\overline{B(f,M)} \ \Rightarrow \ \overline{A(f,M)}.}$$

La réciproque de $D(f,M)$ est

$$\boxed{B(f,M) \ \Rightarrow \ A(f,M)\,.}$$

6. On pose également D : « $\forall (f,M) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R},\ (A(f,M) \ \Rightarrow \ B(f,M))$.

(a) La négation de D est donnée par

$$\boxed{\overline{D}: \quad \exists (f, M) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \ \Big(A(f, M) \ \text{ ET } \ \overline{B(f, M)} \Big).}$$

(b) Montrons que D est fausse autrement dit que $\overline{D}$ est vraie. Trouvons donc une fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et un réel $M \in \mathbb{R}$ tels que $A(f, M)$ et $\overline{B(f, M)}$ soient vraies. Posons $f : x \mapsto x^2$ et $M = 0$. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ donc notamment sur $[0; +\infty[$. Donc

$$A(f, M) \ \text{est vraie.}$$

De plus la fonction f n'est pas décroissante sur $[0; +\infty[$. Par exemple $0 \leqslant 1$ et pourtant $f(0) = 0 < 1 = f(1)$. Donc $B(f, M)$ est fausse autrement dit,

$$\overline{B(f, M)} \ \text{est vraie.}$$

D'où avec cette fonction f et ce réel M, on a bien $A(f, M) \cap \overline{B(f, M)}$ vraie. Conclusion,

$$\boxed{D \text{ est fausse.}}$$

(c) Montrons que la réciproque de $d(f, M)$ est fausse.
Sa réciproque est donnée par $B(f, M) \ \Rightarrow \ A(f, M)$. Pour montrer qu'elle est fausse en général, il faut et il suffit de montrer qu'il existe $(f, M) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ tel que $B(f, M)$ est vraie et $A(f, M)$ est fausse. Autrement dit une fonction f et un réel M tels que f est décroissante sur $[M; +\infty[$ mais pas positive sur $[M; +\infty[$.
Posons par exemple $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} - 1$ et $M = 0$. La fonction $x \mapsto -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Par composée, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; +\infty[$. Donc $B(f, M)$ est vraie. Or on a $\mathrm{e}^{-1} < 1$. Donc $f(1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$. Donc f n'est pas positive sur $[0; +\infty[$ et $A(f, M)$ est fausse. Conclusion,

$$\boxed{\text{la réciproque de } d(f, M) \text{ est fausse en général.}}$$

(d) Déterminons la valeur de vérité de la contraposée de $d(f, M)$ en général.
On a vu à la question 6.b que D est fausse autrement dit qu'il existe $(f, M) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $\overline{d(f, M)}$. Or la contraposée a même valeur de vérité que l'implication initiale. Donc pour cette même fonction f et ce même réel M, on en déduit que la réciproque de $d(f, M)$ est aussi fausse. Conclusion,

$$\boxed{\text{la contraposée de } d(f, M) \text{ est fausse en général.}}$$

7. On admet que $C(f, \ell)$ est donnée mathématiquement par

$$C(f, \ell) \ : \quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in [M; +\infty[, \quad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon.$$

La négation de $C(f, \ell)$ est alors donnée par

$$\boxed{\overline{C(f, \ell)} : \quad \exists \varepsilon > 0, \ \forall M \in \mathbb{R}, \ \exists x \in [M; +\infty[, \quad (\ell - \varepsilon > f(x) \ \text{ OU } \ f(x) > \ell + \varepsilon).}$$

8. Déterminons une fonction f_1 vérifiant $A(f_1, 0) \cap B(f_1, 0) \cap C(f_1, 0)$. Autrement dit, cherchons une fonction f_1 qui est à la fois positive sur $[0; +\infty[$, décroissante sur $[0; +\infty[$ et qui tend vers $\ell = 0$ en $+\infty$.

Posons $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. La fonction f_1 est alors

- bien définie sur $\mathbb{R}$, $f_1 \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
- strictement positive et donc positive sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; +\infty[$. Donc $A(f_1, 0)$ est vraie.
- strictement décroissante et donc décroissante sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; +\infty[$. Donc $B(f_1, 0)$ est vraie.
- On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{u \to -\infty} \mathrm{e}^u = 0$. Donc par composée, f_1 converge en $+\infty$ et

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

  Donc $C(f_1, 0)$ est vraie.

Conclusion, pour

$$\boxed{f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} \end{array}}$$

par exemple, on a $A(f_1, 0) \cap B(f_1, 0) \cap C(f_1, 0)$ vraie.

9. Déterminons une fonction f_2 vérifiant $A(f_2, 0) \cap B(f_2, 0) \cap C(f_2, 1)$.

   Autrement dit, il nous faut une fonction positive sur $[0; +\infty[$, décroissante sur $[0; +\infty[$ et convergeant vers 1. On remarque qu'il nous suffit de translater f_1 de 1 vers le haut. Posons $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + 1$. Alors,

   - la fonction f_2 est bien définie sur $\mathbb{R}$: $f_2 \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
   - la fonction f_2 est positive sur $\mathbb{R}_+$: $A(f_2, 0)$ est vraie,
   - la fonction f_2 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$: $B(f_2, 0)$ est vraie,
   - la fonction f_2 converge en $+\infty$ et

   $$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right) = 0 + 1 = 1,$$

     et $C(f_2, 1)$ est vraie.

   Conclusion, pour

   $$\boxed{f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} + 1 \end{array}}$$

   par exemple, on a $A(f_2, 0) \cap B(f_2, 0) \cap C(f_2, 1)$ vraie.

10. Donnons la traduction en français et le théorème assurant sa véracité de l'assertion suivante :

    $$T : \quad \forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ (\exists M \in \mathbb{R}, \ A(f, M) \cap B(f, M)) \ \Rightarrow \ (\exists \ell \in \mathbb{R}, \ C(f, \ell)).$$

    L'assertion T signifie que pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si on peut trouver un réel M tel que la fonction f soit positive et décroissante sur $[M; +\infty[$ (autrement dit un voisinage de $+\infty$) alors la fonction f converge autrement dit il existe un réel ℓ tel que la fonction f tende vers ℓ en $+\infty$. En résumé, toute fonction décroissante et positive converge, il s'agit donc d'une application du

    $$\boxed{\text{théorème de convergence monotone}}$$

    qui dit que toute fonction décroissante et minorée (ici par 0) converge *(et vers sa borne inférieure mais ça, ce sera pour plus tard !)*

11. La négation de T est donnée par

    $$\boxed{\overline{T} : \quad \exists f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ (\exists M \in \mathbb{R}, \ A(f, M) \cap B(f, M)) \cap \left(\forall \ell \in \mathbb{R}, \ \overline{C(f, \ell)}\right).}$$

12. Déterminons une fonction convergeant vers 0 mais qui n'est positive sur aucun intervalle $[M; +\infty[$.

    Posons $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2+1}$.

- On observe que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geqslant 1 > 0$. Donc $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Soit $M \in \mathbb{R}$. Puisque $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit qu'il existe forcément un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \geqslant M$ i.e. $x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \in [M;+\infty[$. De plus, pour un tel réel x_k, on a
$$f(x_k) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)}{x_k^2+1} = \frac{-1}{x_k^2+1} < 0.$$
Donc f n'est pas positive sur $[M;+\infty[$ et ce pour toute valeur de $M \in \mathbb{R}$. Donc l'assertion $\left(\forall M \in \mathbb{R}, \overline{A(f,M)}\right)$ est vraie.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc
$$-\frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{\sin(x)}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{car } x^2+1>0.$$
Donc
$$-\frac{1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^2+1}.$$
Or $x^2+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc
$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$
Donc par le théorème d'encadrement,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
et $C(f,0)$ est vraie.

Conclusion, la fonction
$$\boxed{f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x^2+1} \end{array}}$$
vérifie $\left(\forall M \in \mathbb{R}, \overline{A(f,M)}\right) \cap C(f,0)$ autrement dit n'est positive sur aucun voisinage de $+\infty$ mais converge vers 0.

On pouvait donner aussi $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ par exemple qui est tout le temps négative, cela fonctionnait mais je préférais vous montrer un exemple de fonction ni positive ni négative partout et qui pourtant s'aplatit vers 0.

Partie 2 : $\overline{\text{monotone}}$ = amusant

Dans cette partie, on veut montrer que l'assertion suivante est FAUSSE : « toute fonction positive et convergeant vers 0 est décroissante ». Autrement dit, on veut montrer l'assertion suivante :
$$S : \quad \exists f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ A(f,0) \cap C(f,0) \cap \left(\forall M \in \mathbb{R},\ \overline{B(f,M)}\right).$$

On pose $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}\sin^2(x)$.

13. Justifions que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto -2x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée, $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction sinus et la fonction carrée sont aussi définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composée $\sin^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Conclusion, par produit,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie et même dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

14. Calculons la dérivée de f.

    Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\mathrm{e}^{-2x}\sin^2(x)\right)' \\
&= \left(\mathrm{e}^{-2x}\right)'\sin^2(x) + \mathrm{e}^{-2x}\left(\sin^2(x)\right)' \\
&= (-2x)'\,\mathrm{e}^{-2x}\sin^2(x) + \mathrm{e}^{-2x}\left(2\sin'(x)\sin(x)\right) \\
&= -2\,\mathrm{e}^{-2x}\sin^2(x) + 2\,\mathrm{e}^{-2x}\cos(x)\sin(x) \\
&= 2\,\mathrm{e}^{-2x}\sin(x)\left(\sin(x)+\cos(x)\right).
\end{aligned}$$

    Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x}\sin(x)\left(\cos(x)-\sin(x)\right).}$$

On admet que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\sin(x)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \sin(x)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

15. Montrons que h est π-périodique.

    Les fonctions sin et cos étant définies sur $\mathbb{R}$, par produit et composée, la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$. Or l'ensemble $\mathbb{R}$ est bien stable par la transformation $x \mapsto x+\pi$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h(x+\pi) &= \sin(x+\pi)\cos\left(x+\pi+\frac{\pi}{4}\right) \\
&= -\sin(x) \times \left(-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{car pour tout } u \in \mathbb{R}, \begin{cases}\sin(u+\pi) = -\sin(u) \\ \cos(u+\pi) = -\cos(u)\end{cases} \\
&= \sin(x)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \\
&= h(x).
\end{aligned}$$

    Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est } \pi\text{-périodique.}}$$

16. Montrons que h n'est ni paire ni impaire.

    On a

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

    D'autre part,

$$h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

    Donc $h\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq h\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et h n'est pas paire. De plus, $h\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq -h\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ donc h n'est pas impaire. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ n'est ni paire, ni impaire.}}$$

17. Déterminons le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [0;\pi]$.

    Pour tout $x \in [0;\pi]$, on a $\sin(x) \geqslant 0$. D'autre part, pour tout $x \in [0;\pi]$, on a $x+\frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$. Pour tout $u \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(u) \geqslant 0$. Donc pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$. Tandis que pour tout $u \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{4}\right] \subset \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos(u) \leqslant 0$. Donc pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0$. On obtient alors le tableau suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$+$	0	$-$	0

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [0;\pi]\,, \quad \begin{cases} h(x) \geqslant 0 & \text{si } x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \\ h(x) \leqslant 0 & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{4};\pi\right]. \end{cases}}$$

18. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminons la stricte monotonie de f sur $\left[k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$. Pour tout $x \in \left]k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right[$, posons $y = x - k\pi$. Alors, $y \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ et on a

$$h(x) = h\left(y+k\pi\right) = h(y) \qquad \text{car } h \text{ est } \pi\text{-périodique d'après la question 15.}$$

Comme $y \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[$, par la question précédente, on a $h(y) \geqslant 0$ et même $h(y) > 0$ donc

$$h(x) = h(y) > 0.$$

Ceci étant vrai pour $x \in \left]k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right[$ quelconque, on obtient

$$\forall x \in \left]k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right[, h(x) = \sin(x)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

Comme $2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2x} > 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \left]k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right[, f'(x) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\,h(x) > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $\left]k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right[$. De plus f est continue en $k\pi$ et $\frac{\pi}{4}+k\pi$ (car la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 13. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f \text{ est strictement croissante sur } \left[k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right].}$$

19. Montrons que S est vraie. Par la question 13. la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ donc $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Puisque $k\pi \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $M \leqslant k\pi$. Or f est, d'après la question précédente, strictement croissante sur $\left[k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$. En particulier, on a

$$k\pi < \frac{\pi}{4}+k\pi \qquad \text{ET} \qquad f\left(k\pi\right) < f\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right).$$

Donc la fonction f n'est pas décroissante sur $\left[k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$. Comme $M \leqslant k\pi$, on a $\left[k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right] \subset [M;+\infty[$. Donc f n'est pas décroissante sur $[M;+\infty[$. Ceci étant vrai pour $M \in \mathbb{R}$ quelconque, on en déduit que

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \overline{B\left(f,M\right)}$$

De plus, la fonction f vérifie aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\sin^2\left(x\right) \geqslant 0.$$

Donc $A\left(f,0\right)$ est vraie. Enfin, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \sin^2(x) \leqslant 1$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\sin^2\left(x\right) \leqslant \mathrm{e}^{-2x}, \qquad \text{car } \mathrm{e}^{-2x} > 0.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, f converge en $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Donc $C(f,0)$ est vraie. Conclusion,

$$\boxed{S: \quad \exists f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ A(f,0) \cap C(f,0) \cap \left(\forall M \in \mathbb{R},\ \overline{B(f,M)}\right) \text{ est vraie.}}$$

20. On a vu que pour $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}\sin^2(x)$, $C(f,0)$ est vraie : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit directement que

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet une asymptote horizontale en } +\infty \text{ d'équation } y = 0.}$$

21. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{u} = +\infty$

Déterminer si f admet une asymptote en $-\infty$ et si oui préciser son équation.

Problème II - Fonction réelle

On considère la fonction suivante $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2+x+1}{x-1}. \end{array}$ On note $\mathscr{G}_f$ le graphe de f.

1. Etudions la parité de f. On note que l'ensemble de définition de f à savoir $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ n'étant pas centré en 0, on en conclut donc directement que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

2. Justifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et calculons sa dérivée.

Les fonctions $x \mapsto x^2+x+1$ et $x \mapsto x-1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $x-1 \neq 0$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\setminus\{1\}}$$

comme fraction de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - \left(x^2+x+1\right)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+x-1-x^2-x-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad f'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}.}$$

3. (a) Cherchons les points critiques de f. Soit Δ le discriminant de x^2-2x-2. On a

$$\Delta = 4+8 = 12.$$

Par conséquent, les deux racines de x^2-2x-2 sont $\frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$ et $\frac{2+\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3}$. Par suite, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x-2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1-\sqrt{3} \text{ OU } x = 1+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Posons $\alpha = 1-\sqrt{3}$ et $\beta = 1+\sqrt{3}$. On en conclut que

$$\boxed{f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha = 1-\sqrt{3} \text{ OU } x = \beta = 1+\sqrt{3}.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha-1} &= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+1-\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{1-2\sqrt{3}+3+2-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \\ &= -\frac{6-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{9-6\sqrt{3}}{3} \\ &= 3-2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} f(\beta) = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha-1} &= \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+1+\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{1+2\sqrt{3}+3+2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{6+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{6\sqrt{3}+9}{3} \\ &= 3+2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(\alpha) = 3-2\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad f(\beta) = 3+2\sqrt{3}.}$$

4. D'après les questions précédentes, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad f'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} = \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-1)^2}.$$

Par suite on obtient le tableau de variation suivant (le calcul des limites est justifié ci-dessous)

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$3-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = +\infty \times \frac{1+0}{1-0} = +\infty.$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} x\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = -\infty \times \frac{1+0}{1-0} = -\infty.$$

De plus,

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

Enfin,

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty.$$

5. Du tableau de variation, on en déduit que $\boxed{3-2\sqrt{3} \text{ est un maximum local}}$ atteint en $\alpha = 1-\sqrt{3}$ et $\boxed{3+2\sqrt{3} \text{ est un minimum local}}$ atteint en $\beta = 1+\sqrt{3}$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $\boxed{f \text{ n'admet pas de maximum global}}$. De même, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ implique que $\boxed{f \text{ n'admet pas de minimum global}}$.

6. Pour tout $x > 1$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+x+1}{x(x-1)} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Poursuivons. Pour tout $x > 1$, on a

$$f(x) - x = \frac{x^2+x+1}{x-1} - x = \frac{x^2+x+1-\left(x^2-x\right)}{x-1} = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet une asymptote d'équation } y = x+2 \text{ en } +\infty.}$$

De même, pour tout $x < 0$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Puis, pour tout $x < 0$,

$$f(x) - x = \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

et donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet la même asymptote en } -\infty \text{ d'équation } y = x+2.}$$

7. D'après le tableau de variation de f, le graphe $\mathscr{G}_f$ admet $\boxed{\text{la droite d'équation } x = 1}$ pour asymptote verticale.

8. Soit $m \in \mathbb{R}$. Puisque $3 - 2\sqrt{3} < 3 + 2\sqrt{3}$, on obtient, par lecture du tableau de variation, les résultats suivants :

$$\boxed{f(x) = m \text{ possède } \begin{cases} \text{2 solutions} & \text{si } m \in \left]-\infty; 3 - 2\sqrt{3}\right[\cup \left]3 + 2\sqrt{3}; +\infty\right[\\ \text{1 seule solution} & \text{si } m \in \left\{3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}\right\} \\ \text{aucune solution} & \text{si } m \in \left]3 - 2\sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3}\right[. \end{cases}}$$

9. Par la question précédente, puisque $3 \in \left]3 - 2\sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3}\right[$, on sait que l'équation $f(x) = 3$ n'admet aucune solution. Autrement dit le réel 3 n'admet aucun antécédent par f. Donc

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective dans } \mathbb{R}.}$$

De même on a $7 = 3 + 2 \times 2 > 3 + 2\sqrt{3}$, donc par la question précédente, on en déduit que l'équation $f(x) = 7$ admet deux solutions. Autrement dit le réel 7 admet deux antécédents par f. Donc

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective sur } \mathbb{R}.}$$

Puisque la fonction f n'est pas surjective (ni même injective d'ailleurs), on conclut a fortiori que

$$\boxed{f \text{ n'est pas bijective.}}$$

10. Par le tableau de variations, on a

$$\boxed{f\left([\beta; +\infty[\right) = \left[3 + 2\sqrt{3}; +\infty\right[, \qquad f\left(]1; +\infty[\right) = \left[3 + 2\sqrt{3}; +\infty\right[}$$

De plus, $0 < 1 - \sqrt{3} = \alpha < 2 < 1 + \sqrt{3}$, $f(0) = \frac{1}{-1} = -1$ et $f(2) = \frac{4+2+1}{2-1} = 7$. Donc Donc

$$\boxed{f\left([0; 2] \setminus \{1\}\right) =]-\infty; -1] \cup [7; +\infty[, \qquad f\left(\mathbb{R} \setminus \{1\}\right) = \left]-\infty; 3 - 2\sqrt{3}\right] \cup \left[3 + 2\sqrt{3}; +\infty\right[.}$$

11. De même, par lecture du tableau de variations,

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \qquad f^{-1}\left([f(\beta); +\infty[\right) =]1; +\infty[.}$$

De plus $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times 3 = 12 > 9$ donc $2\sqrt{3} > 3$ et donc $3 - 2\sqrt{3} < 0 < 2 < 3 + 2\sqrt{3}$. Par conséquent

$$\boxed{f^{-1}([0; 2]) = \emptyset.}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x + 1 = 7x - 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Soit Δ le discriminant associé, on a $\Delta = 36 - 32 = 4$. Ainsi,

$$f(x) = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6 + 2}{2} = 4 \ \text{ OU } x = \frac{6 - 2}{2} = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(\{7\}) = \{2; 4\}.}$$