Devoir Maison 2
Bijections, trigonométrie et nombres complexes

A faire pour le jeudi 17 octobre

Problème I - Trigonométrie

Partie 1 : Couper pi en 8 n'est pas couper les cheveux en 4

1. *Méthode 1 : calcul de* $\cos\frac{\pi}{8}$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
   (b) En s'aidant de la valeur de $\cos(\frac{\pi}{4})$, en déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$.
2. *Méthode 2 : calcul de* $\cos\frac{\pi}{8}$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
   (b) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{8})$ est une solution de l'équation :
   $$8X^4 - 8X^2 + 1 = 0 \quad \text{d'inconnue } X \in \mathbb{R}$$
   (c) Déterminer les racines du trinôme $8u^2 - 8u + 1$ de la variable $u \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$ en justifiant avec soin.
3. (a) Déterminer les valeurs de $\sin(\frac{\pi}{8})$ et $\tan(\frac{\pi}{8})$.
   (b) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{3\pi}{8})$, $\cos(\frac{5\pi}{8})$ et $\cos(\frac{371\pi}{8})$.
4. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que :
   $$\sin^4(\theta) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$
   (b) En déduire $\sin^4(\frac{\pi}{8})$, puis justifier avec soin que la valeur trouvée est compatible avec un résultat trouvé en $3.(a)$.

Partie 2 : Pour ne pas se prendre une veste face à cette inconnue, il vaut mieux prendre une polaire

5. (a) Donner la forme polaire de l'expression $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire la résolution de l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   $$(E) \qquad \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$
   (c) Représenter les solutions de l'équation (E) sur un cercle trigonométrique, puis préciser celles qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
6. Résoudre l'inéquation $2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   On fera une figure soignée pour justifier le résultat.

Problème II - Bijections

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$. Pour ce faire, on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Partie 1 : Un graphe qui décoiffe paraphe ce paragraphe

1. Déterminer I le domaine de définition de f.
2. Calculer lorsque c'est possible la dérivée de f.
3. Déterminer le tableau de variations complet de la fonction f.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
5. Déterminer l'équation de la tangente de f en 0.
6. Tracer le graphe de la fonction f.
   On fera apparaître les éventuelles asymptotes et tangentes précédemment établies.

Partie 2 : « Beau chemin n'est jamais long » proverbe provençal

7. Justifier que f définit une bijection de I dans J où J est un ensemble que l'on précisera. On note encore f sa restriction de I dans J.
8. Sans calcul, comment obtient-on le graphe de f^{-1} à partir de celui de f ? Le tracer sur le même graphique qu'à la question 6. *On fera aussi apparaître ses éventuelles tangentes et asymptotes.*
9. On note $I' = I \setminus \{-1\}$. Soit $x \in I'$. On pose $u = 1+x$ et $v = 1-x$.
   (a) Exprimer $\frac{u}{v}$ en fonction de $f(x)$ et simplifier $u+v$.
   (b) En déduire une expression de $\frac{1}{v}$ uniquement en fonction de $f(x)$.
   (c) Déterminer une expression de $f'(x)$ en fonction de u et de v.
   (d) En déduire que $f'(x) = \frac{\left(f(x)^2+1\right)^2}{4f(x)}$.
10. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
11. Sans calculer f^{-1}, déterminer pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(f^{-1}\right)'(y)$.
12. En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(y) = \frac{a}{y^2+1} + b$, avec a et b deux constantes que l'on précisera.
13. Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.
14. Calculer l'équation de la tangente de f^{-1} en 1 et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y)$ et vérifier la cohérence de votre résultat avec la question 8.

Partie 3 : Une fonction h-ment bien !

Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de h.

15. Sans calculer $\mathcal{D}$, exprimer h en fonction de f sur $\mathcal{D}$.
16. En déduire $\mathcal{D}$ puis justifier que l'on peut restreindre le domaine d'étude à $\left]-\frac{3\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

17. Montrer que pour tout $t \in]-\pi; \pi[$, on a $h\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = h\left(-\frac{\pi}{2} + t\right)$.

18. En déduire que le graphe de h présente une symétrie axiale que l'on précisera.

19. Justifier que h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.

20. Déterminer le tableau de variation de h sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ puis en déduire celui sur $\left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Partie 4 : Quand sinus et cosinus prennent la tangente à la moitié du chemin

21. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$. *On pourra penser à « la forme conjuguée ».*

22. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant \sqrt{3}$.

23. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $h(x) = \sqrt{3}$.

24. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant f^{-1} et le résultat de la question 12. ou 13.

25. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = \frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}$.
    On pourra bien sûr exploiter les formules de l'angle moitié.

Problème III - Complexes

On considère l'application complexe suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{2i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-i}{z-2i} \end{array}$$

1. Calculer $f(-2)$.
2. (a) Calculer $f\left(\frac{-3+i}{2}\right)$.
   (b) Préciser sa forme polaire.
   (c) En déduire $\left(f\left(\frac{-3+i}{2}\right)\right)^{2024}$.
3. Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on pose $g(z) = \mathrm{Im}\left(f(z)\right)$.

4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, $g(z) = \frac{3\mathrm{Re}(z)}{|z-2i|^2}$.
5. En déduire $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$.
6. Déterminer $A = \left\{\theta \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2\,\mathrm{e}^{i\theta} \neq 2i\right\}$.
7. Soit $\theta \in A$ et $z = 2\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
   (a) Montrer que $|z-2i|^2 = 16\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.
   (b) En déduire $g(z)$ en fonction de θ.
8. En déduire $g(-2)$, est-ce cohérent avec la question 1. ?
9. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Résoudre, suivant les valeurs de ω, les solutions de l'équation $\omega = f(z)$, d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.
10. Justifier que f définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ dans un ensemble que l'on déterminera et préciser f^{-1}.
11. Calculer $f^{-1}(1-i)$. Est-ce cohérent avec la question 2.a ?

Problème IV - Complexes

On cherche à déterminer l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \forall z \in \mathbb{U},\ z^2 + az + b \in \mathbb{U} \right\}.$$

1. Montrer que $(0,0) \in E$.
2. (a) A quel ensemble de points du plan complexe correspond $\mathscr{D}_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leqslant 1 \}$?
   (b) Représenter en bleu $\mathscr{D}_1$ et en vert $\mathscr{D}_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leqslant 1 \}$.
   (c) Préciser alors directement $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.
3. Montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, $\quad \begin{cases} u+v \in \mathbb{U} \\ u-v \in \mathbb{U} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |u| \leqslant 1 \\ |v| \leqslant 1. \end{cases}$
4. Soit $(a,b) \in E$.
   (a) Montrer que $|b+1| \leqslant 1$.
   (b) Montrer que $|b-1| \leqslant 1$.
   (c) En déduire b.
   (d) Déterminer également a.
5. Conclure : déterminer proprement E.