Correction du Devoir Maison 2
Bijections, trigonométrie, nombres complexes

Du jeudi 17 octobre

Problème I - Trigonométrie

Partie 1 : Couper pi en 8 n'est pas couper les cheveux en 4

1. *Méthode 1 : calcul de* $\cos\frac{\pi}{8}$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

   $$\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1.}$$

   (b) En prenant $x = \frac{\pi}{8}$ dans la question 1, on obtient

   $$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}.$$

   Or $0 \leqslant \frac{\pi}{8} \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$. Par suite,

   $$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.}$$

2. *Méthode 2 : calcul de* $\cos\frac{\pi}{8}$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivantes :

   $$\begin{aligned}\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 &= 2\left(2\cos^2(x) - 1\right)^2 - 1\\ &= 2\left(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1\right) - 1\\ &= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.\end{aligned}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.}$$

   (b) En prenant $x = \frac{\pi}{8}$ dans la question précédente, on obtient

   $$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1.$$

   Donc en posant $X = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, on a

   $$0 = 8X^4 - 8X^2 + 1.$$

   $$\boxed{\text{Conclusion, } \cos(\tfrac{\pi}{8}) \text{ est une solution de l'équation } 8X^4 - 8X^2 + 1 = 0 \text{ d'inconnue } X \in \mathbb{R}.}$$

(c) Soit Δ le discriminant de $8u^2 - 8u + 1$. On a

$$\Delta = 64 - 32 = 32 = 2 \times 16.$$

Par conséquent les racines associées sont

$$u_1 = \frac{8+4\sqrt{2}}{16} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{8-4\sqrt{2}}{16} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Conclusion, $\boxed{\text{les racines de } 8u^2 - 8u + 1 \text{ sont } u_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \text{ et } u_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.}$

(d) D'après la question (b), on sait que $u = X^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est une solution de l'équation $8u^2 - 8u + 1$. Donc d'après la question (c),

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{OU} \qquad \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Or on note que

$$0 \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

et $0 \leqslant \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$ donc $0 \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis, par la stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) < \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Ainsi

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4} < \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) < \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Comme $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \neq \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, on en déduit nécessairement que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Or on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.}$$

3. (a) Par la formule fondamentale et la question précédente, on a

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Or $0 \leqslant \frac{\pi}{8} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

De là, on en déduit également, avec la valeur du cosinus précédemment calculée, que

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}}$$
$$= \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2}}$$
$$= \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

Or on note que $3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1 \qquad \text{car } \sqrt{2}-1>0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1.}$$

(b) On observe que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$. Donc par ce qui précède,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

De plus $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ et donc de même

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Enfin, on observe que $\frac{371\pi}{8} = \frac{(8\times 46+3)\pi}{8} = 23\times 2\pi + \frac{3\pi}{8}$. La fonction cosinus étant 2π-périodique, on a

$$\cos\left(\frac{371\pi}{8}\right) = \cos\left(23\times 2\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

et par ce qui précède, $\cos\left(\frac{371\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{371\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

4. (a) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Par des formules de linéarisation, on a

$$\begin{aligned}\sin^4(\theta) = \left(\sin^2(\theta)\right)^2 &= \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2\\ &= \frac{1-2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)}{4}\\ &= \frac{1-2\cos(2\theta)+\frac{1+\cos(4\theta)}{2}}{4}\\ &= \frac{3-4\cos(2\theta)+\cos(4\theta)}{8}.\end{aligned}$$

Conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{\sin^4(\theta) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}.}$$

(b) D'après la question précédente avec $\theta = \frac{\pi}{8}$, on a

$$\begin{aligned}\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8}\\ &= 0 - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}.}$$

Vérifions que ce résultat est compatible avec la valeur de $\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)$ trouvée à la question 3.(a) :

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^4 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{4-4\sqrt{2}+2}{16} = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}.$$

$\boxed{\text{Ce calcul est donc bien cohérent avec la valeur précédemment trouvée}}$.

Partie 2 : Pour ne pas se prendre une veste face à cette inconnue, il vaut mieux prendre une polaire

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivants :

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) = 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cos(3x) - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\sin(3x)\right).$$

Donc d'après les calculs de la partie I,

$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos(3x) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin(3x)\right)\\ &= 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right).\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la forme polaire de $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x)$ est

$$\boxed{2\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right).}$$

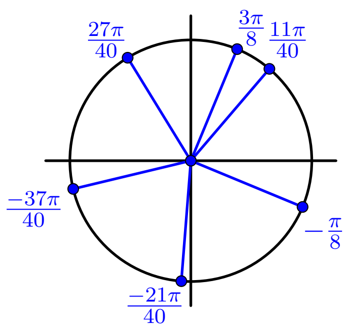
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow \quad \cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow \quad 3x+\frac{\pi}{8} \equiv 2x+\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad 3x+\frac{\pi}{8} \equiv -2x-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{3\pi}{8}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad 5x \equiv -\frac{5\pi}{8}\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{3\pi}{8}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv -\frac{\pi}{8}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right].\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{(E) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{\frac{3\pi}{8}+2k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{5} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

(c) On observe que $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8} \leqslant \frac{3\pi}{8} \leqslant \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{4} \leqslant -\frac{\pi}{8} \leqslant 0$.
Puis si $k=1$, $-\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{5} = \frac{-5\pi+16\pi}{40} = \frac{11\pi}{40} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{40}$ (légèrement supérieur à $\frac{\pi}{4}$),
si $k=2$, $-\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{5} = \frac{11\pi+16\pi}{40} = \frac{27\pi}{40} \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{40}\right[$,
si $k=-1$, $-\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{5} = \frac{-5\pi-16\pi}{40} = -\frac{21\pi}{40} \in \left]-\frac{\pi}{2};-\frac{3\pi}{4}\right[$,
si $k=-2$, $\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} = \frac{-21\pi-16}{40} = -\frac{37\pi}{40} \in \left]-\frac{3\pi}{4};-\pi\right[$.
D'où la figure suivante :



Et l'ensemble des solutions de (E) entre $[-\pi;\pi]$ est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{-37\pi}{40}\,;\,\frac{-21\pi}{40}\,;\,-\frac{\pi}{8}\,;\,\frac{11\pi}{40}\,;\,\frac{3\pi}{8}\,;\,\frac{27\pi}{40}\right\}.}$$

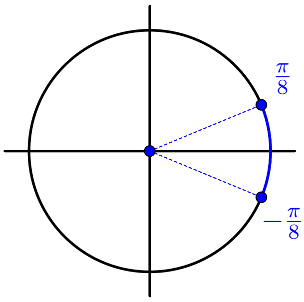
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(x) > \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Donc d'après la partie 1,

$$2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(x) > \cos\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

On observe donc que cela à correspond à la partie bleue suivante du cercle trigonométrique :



Par conséquent,

$$2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{8} + 2k\pi.$$

Conclusion,

$$\boxed{2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + 2k\pi; \frac{\pi}{8} + 2k\pi\right].}$$

Problème II - Bijections

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$. Pour ce faire, on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Partie 1 : Un graphe qui décoiffe paraphe ce paragraphe

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in I \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \geqslant 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \geqslant 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Or, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Conclusion,

$$\boxed{I = [-1;1[\,.}$$

2. Soit $x \in I$. Puisque la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, on a par ce qui précède,

$$\begin{cases} \frac{1+x}{1-x} > 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \,]-1;1[\,.$$

La fonction f est donc dérivable sur $]-1;1[$, de plus pour tout $x \in \,]-1;1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} &= \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \,]-1;1[\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}}.}$$

3. Soit $x \in \,]-1;1[$. Alors, $1-x > 0$ et $1+x > 0$. Donc $f'(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $]-1;1[$ et par continuité de f en -1, f est aussi strictement croissante sur $[-1;1[$. De plus,

$$f(-1) = \sqrt{\frac{1-1}{1+1}} = 0.$$

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 1+x = 2$. Donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1+x}{1-x} = +\infty$ puis par composée avec la fonction racine carrée,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = +\infty.$$

Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	-1		1
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||

4. On a les égalités suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 0}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}.$$

Or $1+x \underset{\substack{x\to -1\\ x>-1}}{\longrightarrow} 0^+$ et $1-x \underset{\substack{x\to -1\\ x>-1}}{\longrightarrow} 2$. Donc

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty.$$

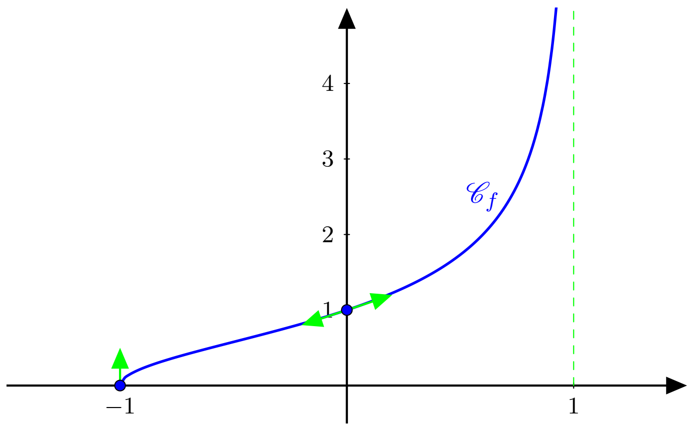
Cela confirme que la fonction f n'est pas dérivable en -1. Plus précisément,

$$\boxed{\text{la graphe de } f \text{ admet une demi-tangente verticale en } x = -1.}$$

5. Puisque la fonction f est dérivable en 0, l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ de f en 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Donc par la question 2., $y = 1 \times x + 1 = x + 1$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{T}_0 : \qquad y = x + 1.}$$

6. Des questions précédentes, on en déduit le graphe suivant :



Partie 2 : « Beau chemin n'est jamais long » proverbe provençal

7. Par ce qui précède, on a

   - f est continue sur I,
   - f est strictement croissante sur I,

   donc par le théorème de la bijection, f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus, J est de la même forme que I :

$$J = f(I) = \left[f(-1) \,; \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) \right[= [0; +\infty[= \mathbb{R}_+.$$

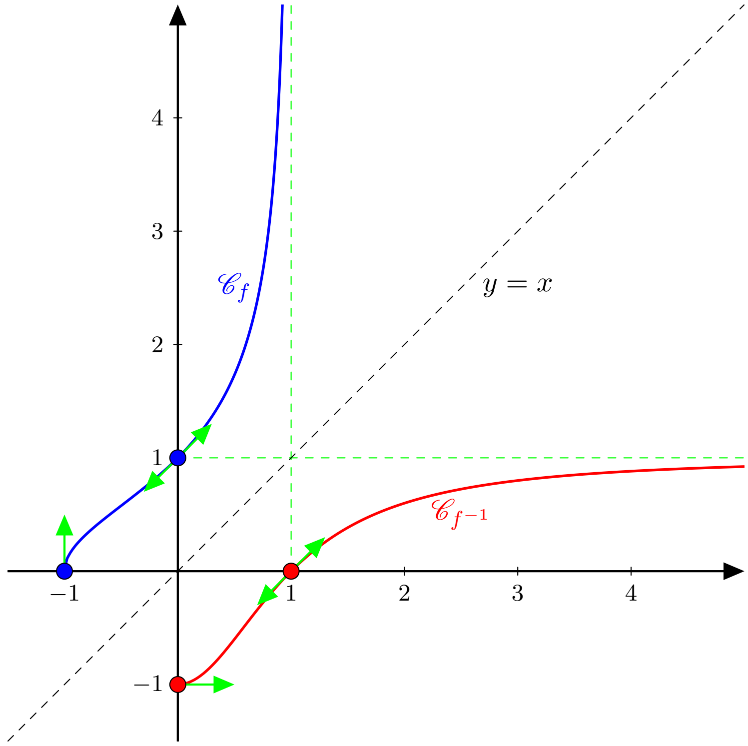
   Conclusion,

$$\boxed{\text{la restriction de } f \text{ de } I = [-1;1[\text{ dans } J = \mathbb{R}_+ \text{ est une bijection.}}$$

8. D'après le cours, on sait que l'on obtient le graphe de f^{-1} à partir de celui de f par

$$\boxed{\text{une symétrie d'axe } y = x.}$$

   On obtient donc



9. On note $I' = I \setminus \{-1\}$. Soit $x \in I'$. On pose $u = 1 + x$ et $v = 1 - x$.

   (a) On a les égalités entre réels suivantes :

$$\frac{u}{v} = \frac{1+x}{1-x} = f(x)^2 \qquad \text{et} \qquad u + v = 1 + x + 1 - x = 2.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\frac{u}{v} = f(x)^2 \text{ et } u + v = 2.}$$

   (b) Puisque $u + v = 2$ et que $x \neq 1$, on a $v \neq 0$. Donc en divisant par v, on obtient que

$$\frac{u}{v} + 1 = \frac{2}{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)^2 + 1 = \frac{2}{v}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{v} = \frac{f(x)^2 + 1}{2}.}$$

   (c) Par la question 2. on a directement

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}} = \frac{1}{v^{3/2}\sqrt{u}}.}$$

   (d) Par les questions précédentes, on observe que

$$f'(x) = \frac{1}{v^{3/2}\sqrt{u}} = \frac{1}{v^{3/2}v^{1/2}\sqrt{\frac{u}{v}}} = \frac{1}{v^2\sqrt{f(x)^2}} = \left(\frac{1}{v}\right)^2 \frac{1}{f(x)}, \qquad \text{car } f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \geqslant 0.$$

   Donc par la question 9.b

$$f'(x) = \left(\frac{f(x)^2 + 1}{2}\right)^2 \frac{1}{f(x)} = \frac{\left(f(x)^2 + 1\right)^2}{4f(x)}.$$

Conclusion, on trouve bien que pour $x \in I'$,

$$\boxed{f'(x) = \frac{\left(f(x)^2+1\right)^2}{4f(x)}.}$$

10. Par la question 2. on sait que f est dérivable sur I' et pour tout $x \in I'$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}} \neq 0$. Donc
    - f est dérivable sur I',
    - f est strictement croissante sur I' (d'après ce qui précède)
    - pour tout $x \in I'$, $f'(x) \neq 0$.

    Donc d'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I') =]\lim_{x\to -1} f(x)\,; \lim_{x\to 1} f(x)[= \mathbb{R}_+^*$. Conclusion,

    $$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

11. Toujours par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, on sait également que

    $$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

    Or d'après la question 9. on a pour tout $u \in I'$, $f'(u) = \frac{\left(f(u)^2+1\right)^2}{4f(u)}$. Or pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $u = f^{-1}(y) \in \mathbb{R}_+^*$, donc

    $$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\frac{\left(f(f^{-1}(y))^2+1\right)^2}{4f(f^{-1}(y))}} = \frac{1}{\frac{(y^2+1)^2}{4y}} = \frac{4y}{(y^2+1)^2}.$$

    Conclusion,

    $$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{4y}{(y^2+1)^2}.}$$

12. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{a}{y^2+1} \end{array}$. On observe que g est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

    $$g'(y) = -\frac{2ay}{(y^2+1)^2}.$$

    Donc par la question précédente, on observe que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(y) = -\frac{a}{2}\left(f^{-1}\right)'(y)$, en particulier, en prenant $a=-2$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y)$. Donc $y \mapsto \frac{-2}{y^2+1}$ est une primitive de $\left(f^{-1}\right)'$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent,

    $$\exists b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{-1}(y) = \frac{-2}{y^2+1} + b.$$

    Puisque $f(0) = \sqrt{\frac{1+0}{1-0}} = 1$, on en déduit que $f^{-1}(1) = 0$. Dès lors,

    $$0 = f^{-1}(1) = \frac{-2}{1+1} + b = -1 + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 1.$$

    Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{-1}(y) = \frac{-2}{y^2+1} + 1$. Attention le résultat parle de $\mathbb{R}_+$, il nous reste à vérifier qu'en 0 la formule marche encore. On a $f(-1) = 0$ donc $f^{-1}(0) = -1$. D'autre part, pour $y = 0$, $\frac{-2}{y^2+1} + 1 = -2 + 1 = -1$. Donc la formule reste vraie pour $y = 0$. Conclusion, avec $\boxed{a=-2}$ et $\boxed{b=1}$, on obtient bien

    $$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+, \qquad f^{-1}(y) = \frac{-2}{y^2+1} + 1 = \frac{y^2-1}{y^2+1}.}$$

13. Soit $(x,y) \in [-1;1[\times \mathbb{R}_+$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{car } \begin{cases} y \geqslant 0 \\ \frac{1+x}{1-x} \geqslant 0 \text{ pour } x \in [-1;1[\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad y^2(1-x) = 1+x \quad \text{car } x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 - 1 = x\left(1+y^2\right) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{y^2-1}{y^2+1} \quad \text{car } 1+y^2 \geqslant 1 > 0. \end{aligned}$$

Vérifions que $\frac{y^2-1}{y^2+1} \in [-1;1[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \frac{y^2-1}{y^2+1} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -y^2-1 \leqslant y^2-1 < y^2+1 \quad \text{car } y^2+1>0 \\ &\Leftrightarrow \quad -y^2 \leqslant y^2 \text{ toujours vraie } \text{ ET } -1<1 \text{ toujours vraie }. \end{aligned}$$

Donc $\frac{y^2-1}{y^2+1} \in [-1;1[$. Au final, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a bien une et une seule solution $x \in [-1;1[$ vérifiant $y = f(x)$. Donc tout réel positif y admet un et un seul antécédent dans $[-1;1[$ donné par $x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$. Conclusion, on retrouve bien que f est bijective et

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+, \qquad f^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{y^2+1}.}$$

14. On a déjà vu que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc notamment en 1 donc l'équation de la tangente de f^{-1} en 1 est donnée par

$$\mathcal{T}' : y = \left(f^{-1}\right)'(1)\,(x-1) + f^{-1}(1).$$

Par les question précédentes :

$$\mathcal{T}' : y = \frac{4}{\left(1^2+1\right)^2}(x-1) + \frac{1^2-1}{1^2+1} = x-1.$$

L'équation de la tangente de f^{-1} en 1 vaut

$$\boxed{\mathcal{T}' : y = x-1.}$$

Cela correspond bien à ce que l'on a dessiné en question 8.

D'autre part,

$$\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2-1}{y^2+1} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{y^2}}{1+\frac{1}{y^2}} = 1.$$

On observe alors que le graphe de f^{-1} présente $\boxed{\text{une asymptote horizontale d'équation } y=1 \text{ en } +\infty.}$ C'est bien ce que nous avions dessiné. Ce que l'on est fort tout de même !

Partie 3 : Une fonction h-ment bien !

Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de h.

15. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on observe directement que

$$\boxed{h(x) = \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}} = f\left(\sin(x)\right).}$$

16. La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} h(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow f(\sin(x)) \text{ existe} \\ &\Leftrightarrow -1 \leqslant \sin(x) < 1 \qquad \text{d'après la question 1.} \\ &\Leftrightarrow \sin(x) \neq 1 \qquad \text{car } \sin(x) \in [-1;1] \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

On observe que l'ensemble $\mathcal{D}$ est invariant par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$. De plus, la fonction sinus étant 2π-périodique, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$h(x + 2\pi) = f(\sin(x + 2\pi)) = f(\sin(x)) = h(x).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

On peut donc réduire son domaine d'étude à un ensemble inclus dans $\mathcal{D}$ de longueur 2π par exemple

$$\left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cap \mathcal{D} = \left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{on peut réduire le domaine d'étude de } h \text{ à } \left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.}$$

17. Soit $t \in]-\pi;\pi[$. Alors, on a $\pi > -t > -\pi$, donc $\frac{\pi}{2} > -\frac{\pi}{2} - t > -\frac{3\pi}{2}$ et donc on a bien $-\frac{\pi}{2} - t \in \mathcal{D}$. De plus,

$$h\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = f\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = f(-\cos(t)).$$

De même, on a $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + t < \frac{\pi}{2}$, donc $-\frac{\pi}{2} + t \in \mathcal{D}$ et

$$h\left(-\frac{\pi}{2} + t\right) = f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = f(-\cos(t)).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in]-\pi;\pi[, \qquad h\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = h\left(-\frac{\pi}{2} + t\right).}$$

18. Par la question précédente, les points d'abscisse $x = -\frac{\pi}{2} - t$ et $x = -\frac{\pi}{2} + t$ ont la même ordonnée $y = h\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = h\left(-\frac{\pi}{2} + t\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } h \text{ présente une symétrie axiale d'axe verticale } x = -\frac{\pi}{2}.}$$

19. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(x) \in]-1;1[= I'$ et f est dérivable sur I'. Donc par composée, on en déduit que $h = f \circ \sin$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad h'(x) = \sin'(x) f'(\sin(x)) = \cos(x) \frac{1}{(1 - \sin(x))^{3/2}\sqrt{1 + \sin(x)}}.$$

Conclusion, $\boxed{h \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}$ et

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad h'(x) = \frac{\cos(x)}{(1 - \sin(x))^{3/2}\sqrt{1 + \sin(x)}}.}$$

20. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On a $-1 < \sin(x) < 1$. Donc $1-\sin(x) > 0$ et $1+\sin(x) > 0$. De plus, $\cos(x) > 0$. Donc par quotient,
$$h'(x) = \frac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^{3/2}\sqrt{1+\sin(x)}} > 0.$$
La fonction h est donc strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Or h est définie et même continue sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc par continuité, h est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. En outre, par la question 3.
$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = f(-1) = 0.$$
D'autre part, en posant $u = \sin(x) \underset{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}{\longrightarrow} 1^-$, on a, toujours par la question 3.
$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} h(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(\sin(x)) = \lim_{\substack{u\to 1\\ u<1}} f(u) = +\infty.$$
Conclusion, le tableau de variation de h est

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
h	0	$\nearrow$	$+\infty$

Par la symétrie axiale, d'axe $x = -\frac{\pi}{2}$, on obtient directement,

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Partie 4 : Quand sinus et cosinus prennent la tangente à la moitié du chemin

21. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On a
$$h(x) = \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}.$$
Or puisque $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(x) \in]-1;1[$, en particulier, $1+\sin(x) > 1-1 = 0$. Donc
$$h(x) = \sqrt{\frac{(1+\sin(x))^2}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}} = \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \qquad \text{car } 1+\sin(x) > 0$$
$$= \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{\cos^2(x)}}.$$
Or $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(x) > 0$. Ainsi, $\sqrt{\cos^2(x)} = \cos(x)$. Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \qquad h(x) = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}.}$$

22. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'inéquation a un sens si et seulement si $\cos(x) \neq 0$ ou encore $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Fixons donc $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Premier cas, $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$. Dans ce cas, $\cos(x) > 0$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant \sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + \sin(x) \geqslant \sqrt{3}\cos(x) \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \geqslant \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \geqslant \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} + 2n\pi \leqslant x + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{6} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, les solutions sont

$$\mathscr{S}_1 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[.$$

Second cas, $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[$ et donc $\cos(x) < 0$. Dès lors, on obtient de façon similaire

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant \sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + \sin(x) \leqslant \sqrt{3}\cos(x) \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \leqslant \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leqslant \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{3} + 2n\pi \leqslant x + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{3} + 2n\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2n\pi.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, il n'y a aucune solution, $\mathscr{S}_2 = \emptyset$. Conclusion, globalement l'ensemble solution est donc

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[.}$$

23. Soit $x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$. Par la question 21. on a

$$h(x) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sin(x) = \sqrt{3}\cos(x) \qquad \text{car } \cos(x) \neq 0$$

Donc comme dans la question précédente, par la forme polaire, on a

$$h(x) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Puisque $x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, on a $x + \frac{\pi}{6} \in \left] -\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right[$ et donc

$$h(x) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}.$$

Conclusion, on a

$$\boxed{h(x) = \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{\pi}{6}.}$$

24. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\sin(x) \in]-1;1[$. On a par ce qui précède,

$$h(x) = \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\sin(x)) = \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x) = f^{-1}\left(\sqrt{3}\right).$$

Or par la question 12. ou 13. pour tout $y \geqslant 0$, $f^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{y^2+1}$, donc

$$h(x) = \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x) = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad \text{car } x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Conclusion, on retrouver bien (c'est drôlement beau les maths)

$$\boxed{h(x) = \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{\pi}{6}.}$$

25. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Par définition,

$$h(x) = \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}.$$

Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, ce qui est possible car $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$. Alors on obtient que

$$\sin(x) = \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Puisque $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$, on a $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ et donc

$$\sin(x) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}} = \sqrt{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2-2t}} \qquad\qquad \text{car } 1+t^2 > 0 \\ &= \sqrt{\frac{(1+t)^2}{(1-t^2)}} = \frac{|1+t|}{|1-t|}. \end{aligned}$$

Or puisque $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$, alors $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \in]-1;1[$. Donc $1+t > 0$ et $1-t > 0$. Ainsi, on obtient bien que

$$\boxed{\forall \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad h(x) = \frac{1+t}{1-t} = \frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}.}$$

Problème III - Complexes

On considère l'application complexe suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{2i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-i}{z-2i} \end{array}$$

1. On a les calculs suivants :

$$f(-2) = \frac{2(-2)-i}{(-2)-2i} = \frac{-4-i}{-2-2i} = \frac{4+i}{2(1+i)} = \frac{(4+i)(1-i)}{2(1+1)} = \frac{4-4i+i+1}{4} = \frac{5-3i}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(-2) = \frac{5-3i}{4}.}$$

2. (a) C'est reparti. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f\left(\frac{-3+i}{2}\right)=\frac{-3+i-i}{\frac{-3+i}{2}-2i}=\frac{-3}{\frac{-3-3i}{2}}=\frac{2}{1+i}=\frac{2\left(1-i\right)}{2}=1-i.$$

Conclusion,

$$\boxed{f\left(\frac{-3+i}{2}\right)=1-i.}$$

(b) On a les égalités suivantes :

$$f\left(\frac{-3+i}{2}\right)=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Or $\sqrt{2}>0$, conclusion, la forme polaire de $f\left(\frac{-3+i}{2}\right)$ est

$$\boxed{f\left(\frac{-3+i}{2}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.}$$

(c) Par la question précédente,

$$\begin{aligned}\left(f\left(\frac{-3+i}{2}\right)\right)^{2021}&=\sqrt{2}^{2021}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}\times 2021}\\&=\sqrt{2}^{2020}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}(252\times 8+5)}\\&=2^{1010}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2i\pi\times 252-i\frac{5\pi}{4}}\\&=2^{1010}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{4}}\\&=2^{1010}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\\&=2^{1010}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=2^{1010}\left(-1+i\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\left(f\left(\frac{-3+i}{2}\right)\right)^{2021}=2^{1010}\left(-1+i\right).}$$

3. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}z\in f^{\leftarrow}\left(\mathbb{U}\right)\quad&\Leftrightarrow\quad f(z)\in\mathbb{U}\\&\Leftrightarrow\quad |f(z)|^2=1\\&\Leftrightarrow\quad f(z)\overline{f(z)}=1\\&\Leftrightarrow\quad \frac{2z-i}{z-2i}\frac{2\overline{z}+i}{\overline{z}+2i}=1\\&\Leftrightarrow\quad (2z-i)\left(2\overline{z}+i\right)=(z-2i)\left(\overline{z}+2i\right)\qquad\text{car } z\neq 2i \text{ et donc } \overline{z}+2i\neq 0\\&\Leftrightarrow\quad 4z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}+1=z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}+4\\&\Leftrightarrow\quad 3z\overline{z}=3\\&\Leftrightarrow\quad 3\left|z\right|^2=3\\&\Leftrightarrow\quad |z|^2=1\\&\Leftrightarrow\quad z\in\mathbb{U}.\end{aligned}$$

On remarque que $2i\notin\mathbb{U}$. Donc il n'est pas nécessaire d'enlever cette valeur de l'ensemble solution. Conclusion,

$$\boxed{f^{\leftarrow}\left(\mathbb{U}\right)=\mathbb{U}.}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on pose $g(z) = \mathrm{Im}\,(f(z))$.

4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(f(z)) &= \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{2z-i}{z-2i} - \frac{2\overline{z}+i}{\overline{z}+2i}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(2z-i)(\overline{z}+2i) - (2\overline{z}+i)(z-2i)}{(z-2i)(\overline{z}+2i)} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{2|z|^2 + 4iz - i\overline{z} + 2 - 2|z|^2 + 4i\overline{z} - iz - 2}{|z-2i|^2} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{3iz + 3i\overline{z}}{|z-2i|^2} \\
&= \frac{3}{|z-2i|^2}\frac{z+\overline{z}}{2} \\
&= \frac{3\mathrm{Re}\,(z)}{|z-2i|^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}, \qquad g(z) = \frac{3\mathrm{Re}\,(z)}{|z-2i|^2}.}$$

5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(z) \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad g(z) = \mathrm{Im}\,(f(z)) = 0.$$

Donc par la question précédente, on a

$$z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3\mathrm{Re}\,(z)}{|z-2i|^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Re}\,(z) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in i\mathbb{R}.$$

Attention, cette fois-ci, on n'oublie pas d'enlever la valeur $2i$:

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = i\mathbb{R} \setminus \{2i\}.}$$

6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\theta \in A \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\,\mathrm{e}^{i\theta} \neq 2i = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{i\theta} \neq \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$$

Par la pseudo-unicité de la forme polaire, on a

$$\theta \in A \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \Leftrightarrow \qquad \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

7. Soit $\theta \in A$ et $z = 2\,\mathrm{e}^{i\theta}$.

   (a) On a les égalités suivantes :

$$|z-2i|^2 = \left|2\,\mathrm{e}^{i\theta} - 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right|^2 = 4\left|\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right|^2.$$

Par factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{aligned}|z-2i|^2 &= 4\left|e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}-e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)\right|^2\\ &= 4\left|e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|^2\left|2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|^2\\ &= 16\sin^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{|z-2i|^2 = 16\sin^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right).}$$

(b) Par ce qui précède,

$$g(z) = \frac{3\mathrm{Re}\,(z)}{|z-2i|^2} = \frac{3\mathrm{Re}\left(2\,e^{i\,\theta}\right)}{16\sin^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{6\cos(\theta)}{16\sin^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(z) = \frac{3\cos(\theta)}{8\sin^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}.}$$

8. On observe que $-2 = 2\,e^{i\pi}$. Donc en posant $\theta = \pi \in A$ dans la question précédente, on trouve que

$$g(-2) = \frac{3\cos(\pi)}{8\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-3}{8\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-3}{8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{3}{4}.$$

Or par la question 1. on a $f(-2) = \frac{5-3i}{4}$ et par conséquent, on retrouve bien que

$$g(-2) = \mathrm{Im}\,(f(-2)) = -\frac{3}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(-2) = -\frac{3}{4}.}$$

9. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{2i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(z)=\omega \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2z-i}{z-2i}=\omega \quad \Leftrightarrow \quad 2z-i=\omega\,(z-2i) \qquad \text{car } z\neq 2i\\ &\Leftrightarrow \quad 2z-i=\omega\,z-2i\,\omega\\ &\Leftrightarrow \quad 2i\,\omega-i=z\,(\omega-2)\,.\end{aligned}$$

Premier cas, si $\omega = 2$, on a

$$4i - i = 3i = 0$$

ce qui est impossible. Dans ce cas l'ensemble solution est vide :

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \emptyset.}$$

Second cas, $\omega \neq 2$. Alors,

$$f(z) = \omega \quad \Leftrightarrow \quad z = i\frac{2\,\omega-1}{\omega-2}.$$

Dans ce cas, on obtient une unique possibilité. Vérifions que cette valeur est bien différente de $2i$:

$$\begin{aligned} 2i = i\frac{2\,\omega-1}{\omega-2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,\omega-4 = 2\,\omega-1 \qquad \text{car } \omega\neq 2\\ &\Leftrightarrow \quad -4=-1 \qquad \text{impossible.}\end{aligned}$$

Donc $i\frac{2\omega-1}{\omega-2} \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. Conclusion dans ce cas, l'ensemble des complexes solutions est

$$\boxed{f(z)=\omega \qquad \Leftrightarrow \qquad z = i\frac{2\omega-1}{\omega-2}.}$$

10. Par la question précédente, on obtient que tout complexe $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ admet un et un seul antécédent z dans $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ par f. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ définit une bijection de } \mathbb{C} \setminus \{2i\} \text{ dans } \mathbb{C} \setminus \{2\}.}$$

De plus, toujours par la question précédente, on a

$$\boxed{\forall \omega \in \mathbb{C} \setminus \{2\}, \qquad f^{-1}(\omega) = i\frac{2\omega-1}{\omega-2}.}$$

11. Posons $\omega = 1+i$. On observe que $1+i \neq 2$, donc

$$f^{-1}(1-i) = i\frac{2-2i-1}{1-i-2} = i\frac{1-2i}{-1-i} = i\frac{(1-2i)(-1+i)}{2} = i\frac{-1+i+2i+2}{2} = i\frac{1+3i}{2} = \frac{-3+i}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(1+i) = \frac{-3+i}{2}.}$$

$\boxed{\text{Ce qui est bien cohérent avec la question 2.a}}$ car en composant par f, on retrouve que

$$f \circ f^{-1}(1-i) = f\left(\frac{-3+i}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1-i = f\left(\frac{-3+i}{2}\right)$$

Problème IV - Complexes

On cherche à déterminer l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \forall z \in \mathbb{U},\ z^2+az+b \in \mathbb{U} \right\}.$$

1. Posons $(a,b)=(0,0)$. Alors pour tout $z \in \mathbb{U}$, on a

$$\left|z^2+az+b\right| = \left|z^2\right| = |z|^2 = 1.$$

Donc $z^2+az+b \in \mathbb{U}$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{U}$, on conclut que

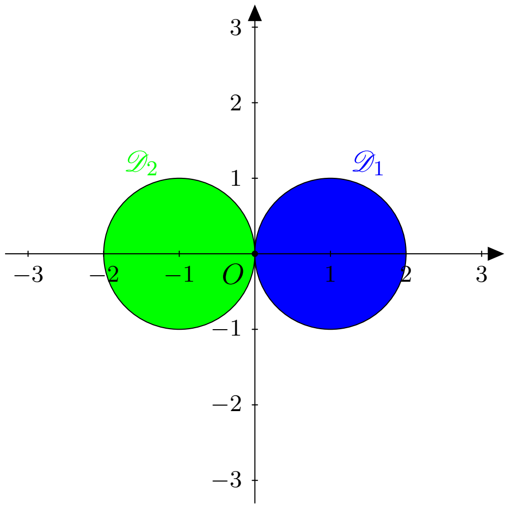
$$\boxed{(a,b) \in E.}$$

2. (a) Directement,

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{D}_1 \text{ correspond au disque fermé de centre 1 et de rayon 1.}}$$

A quel ensemble de points du plan complexe correspond $\mathscr{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leqslant 1\}$?

(b) Ainsi,



(c) Graphiquement, on observe que

$$\boxed{\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \{0\}.}$$

3. Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\begin{cases} u+v \in \mathbb{U} \\ u-v \in \mathbb{U} \end{cases}$. Dès lors $|u+v| = 1$ et $|u-v| = 1$. Or on observe que $u = \frac{u+v+u-v}{2}$. Donc par l'inégalité triangulaire,

$$|u| = \left|\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right| \leqslant \left|\frac{u+v}{2}\right| + \left|\frac{u-v}{2}\right| = \frac{|u+v|}{2} + \frac{|u-v|}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Donc $|u| \leqslant 1$. De même, $v = \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}$. Donc par l'inégalité triangulaire,

$$|v| \leqslant \left|\frac{u+v}{2}\right| + \left|\frac{u-v}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2, \qquad \begin{cases} u+v \in \mathbb{U} \\ u-v \in \mathbb{U} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u| \leqslant 1 \\ |v| \leqslant 1. \end{cases}}$$

4. Soit $(a, b) \in E$.

(a) Alors par définition de E,

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad z^2 + az + b \in \mathbb{U}.$$

En particulier, pour $z = 1$, on a $z \in \mathbb{U}$, et donc

$$1 + a + b \in \mathbb{U}.$$

De même, pour $z = -1$, on a $-1 \in \mathbb{U}$ et donc

$$1 - a + b \in \mathbb{U}.$$

Posons $u = b + 1$ et $v = a$. On a $u + v \in \mathbb{U}$ et $u - v \in \mathbb{U}$. Donc par la question précédente, $|1 + b| = |u| \leqslant 1$. Conclusion,

$$\boxed{|b+1| \leqslant 1.}$$

(b) De même, en prenant $z = i$, $z \in \mathbb{U}$ et on a

$$-1 + ia + b \in \mathbb{U}$$

et pour $z = -i$, on a $z \in \mathbb{U}$ d'où
$$-1 - ia + b \in \mathbb{U}$$
En posant $u = b - 1$ et $v = ia$, on obtient à nouveau que $u + v \in \mathbb{U}$ et $u - v \in \mathbb{U}$ et donc
$$|b - 1| = |u| \leqslant 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{|b - 1| \leqslant 1.}$$

(c) Par les deux questions précédentes, on en déduit que $b \in \mathscr{D}_2$ d'une part et $b \in \mathscr{D}_1$ d'autre part. Donc $b \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$. Or par la question 2.c $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \{0\}$. Conclusion,
$$\boxed{b = 0.}$$

(d) Puisque $b = 0$, on a donc pour tout $z \in \mathbb{U}$, $z^2 + az \in \mathbb{U}$ et donc
$$1 = \left|z^2 + az\right| = |z|\,|z + a| = |z + a| \qquad \text{car } z \in \mathbb{U}.$$
En particulier, pour $z = 1 \in \mathbb{U}$, $|1 + a| = 1$ et pour $z = -1$, $|-1 + a| = 1$. Donc $|a + 1| \leqslant 1$ et $|a - 1| \leqslant 1$ et donc $a \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$. Conclusion,
$$a = 0.$$

5. On a montré à la question 4. que si $(a, b) \in E$, alors nécessairement $(a, b) = (0, 0)$. Réciproquement, à la question 1., on a vérifié que $(0, 0) \in E$. Conclusion,
$$\boxed{E = \{(0, 0)\}.}$$