Devoir Maison 3
Calcul algébrique et fonctions usuelles

A faire pour le jeudi 14 novembre

Problème I - Calcul algébrique

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R} \right\}$ l'ensemble des suites réelles. On considère alors l'application suivante :

$$\varphi \;:\; \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \varphi(a) = b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array},$$

où on définit la suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose par convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$.
Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Partie 1 : Faisons des sommes pour se reposer

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 1$.

   Préciser alors $\varphi(a) = b$ i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = x^k$. Préciser alors $b = \varphi(a)$.

3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n} \binom{n}{k} x^l$.

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant l \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} x^l$.

Partie 2 : Une somme de bibinôme (de la part de bibi)

5. Soit $(i, k, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $i \leqslant k \leqslant n$. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}$.

6. Soit $i \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \binom{k}{i}$.

   (a) Suivant la valeur de i préciser a_3.

   (b) Soit $b = \varphi(a)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2^{n-i}\binom{n}{i}$.

   (c) Si $i = 0$, quel résultat retrouve-t-on ?

Partie 3 : Image des premiers entiers (à ne pas confondre avec la magie des entiers premiers)

On suppose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$ et on pose toujours $b = \varphi(a)$. On propose trois méthodes pour calculer b.

7. *Méthode 1.* A l'aide de la question 6. calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n.

8. *Méthode 2.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \end{array}$.

   (a) Calculer deux expressions de f'.

   (b) Retrouver alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de b_n.

9. *Méthode 3.*

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans s'aider des questions 7. ou 8., montrer que
   $$b_{n+1} = b_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} k.$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 2b_n + 2^n$.

   (c) A l'aide d'une récurrence retrouver alors le résultat de la question 7. ou 8.b

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < k \leqslant n} \binom{n}{k}$.

Partie 4 : Kronecker n'est pas une marque de bière mais ça rafraichit quand même

On suppose dans cette partie que $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ est une suite quelconque et on pose $b = \varphi(a)$. On définit également pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, appelé le symbole de Kronecker.

11. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0; n]\!]$, à l'aide de la question 5. exprimer $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i}$ en fonction de $\delta_{n,i}$.

12. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$
    $$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

13. Démontrer que φ est bijective.

Problème II - Fonctions usuelles

On considère la fonction suivante :

$$\mathrm{th} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}. \end{array}$$

On pose ensuite

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right) + \arccos\left(\mathrm{th}(x)\right). \end{array}$$

L'objectif est de montrer par deux méthodes que f est une fonction constante.

Partie 1 : Etude de la fonction tangente hyperbolique ou Termite Hystérique si vous préférez

1. Justifier que th est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathrm{th}(0)$ et $\mathrm{th}\left(\ln(2)\right)$.
3. Préciser la parité de th.
4. Calculer th' en fonction de th uniquement.
5. Déterminer une seconde expression de th' en fonction de ch uniquement.
6. Préciser le comportement asymptotique de la courbe de th au voisinage de $+\infty$.
7. Préciser le tableau de variations complet de th.
8. Déterminer l'équation de la tangente à th au point d'abscisse $x = 0$.
9. Tracer la courbe représentative de la fonction th.

Partie 2 : Sa réciproque a des arguments pour vous plaire

10. Montrer que th définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J que l'on précisera. On note $\mathrm{argth} = \mathrm{th}^{-1}$ sa fonction réciproque.
11. Justifier que argth est dérivable sur J et montrer que $\forall x \in J$, $\mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
12. En déduire une expression de argth sur J.
    On pourra découper $\frac{1}{(1-x)(1+x)}$ en deux fractions plus simples.
13. Retrouver le résultat précédent en résolvant l'équation $y = \mathrm{th}(x)$.
14. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \mathrm{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \mathrm{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)$.
15. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$.

Partie 3 : Pi (sur deux) y'a la fonction f aussi

16. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
17. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
18. Calculer $f(0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
19. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
20. En déduire la valeur f sur $\mathbb{R}$.

Partie 4 : Prenez arccos, sh, arctan, th, sin, cos et touillez très fort

On souhaite redémontrer le résultat de la partie précédente.

21. (a) Soit $x \in \,]-1;1[$. A l'aide du graphe de la fonction arccos, intuiter la valeur de $\frac{\arccos(-x)+\arccos(x)}{2}$.
    (b) Démontrer la formule précédente.
    (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \pi - f(x)$.

On fixe dans la suite $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $a = \mathrm{sh}(x)$, $u = \arctan(a)$, $b = \mathrm{th}(x)$ et $v = \arccos(b)$.

22. Préciser à quel(s) intervalle(s) appartiennent u et v.
23. Redémontrer la valeur de $\sin(\arccos(b))$ en fonction de b.
24. Simplifier $\cos^2(\arctan(a))$ en fonction de a.
25. En déduire $\cos(\arctan(a))$.
26. De même simplifier $\sin(\arctan(a))$ en fonction de a.
27. Déduire des questions précédentes la valeur de $\cos(f(x))$.
28. En déduire la valeur de f sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $\mathbb{R}_-$.