Correction du Devoir Maison 3
Calcul algébrique et fonctions usuelles

Du jeudi 14 novembre

Problème I - Calcul algébrique

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R} \right\}$ l'ensemble des suites réelles. On considère alors l'application suivante :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \varphi(a) = b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{array}$$

où on définit la suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose par convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$.
Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Partie 1 : Faisons des sommes pour se reposer

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}.$$

On reconnaît alors une somme de Newton. Par conséquent,

$$b_n = (1+1)^n = 2^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = 2^n.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = x^k$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k}.$$

On reconnaît à nouveau une somme de Newton. On obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = (x+1)^n.}$$

3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} \binom{n}{k} x^l &= \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^l \\
&= \sum_{l=0}^{n} \left(x^l \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{n} \left(x^l (1+1)^n \right) && \text{car on reconnaît une somme de Newton} \\
&= 2^n \sum_{l=0}^{n} x^l.
\end{aligned}$$

On reconnaît alors une somme géométrique de raison x. D'où

$$\boxed{\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n}\binom{n}{k}x^l=\begin{cases}2^n\frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x\neq 1\\ (n+1)\,2^n & \text{si } x=1.\end{cases}}$$

4. Soient $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $n\in\mathbb{N}$. La somme étant triangulaire, on commence par écrire que

$$\sum_{0\leqslant l\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}x^l=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{n}{k}x^l\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}x^l\right).$$

La somme interne est une somme géométrique de raison $x\neq 1$,

$$\sum_{0\leqslant l\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}x^l=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\frac{1-x^{k+1}}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\frac{x}{1-x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Donc par les questions 1. et 2.

$$\sum_{0\leqslant l\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}x^l=\frac{2^n}{1-x}-\frac{x\,(x+1)^n}{1-x}=\frac{2^n-x\,(x+1)^n}{1-x}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{0\leqslant l\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}x^l=\frac{2^n-x\,(x+1)^n}{1-x}.}$$

Partie 2 : Une somme de bibinôme (de la part de bibi)

5. Soit $(i,k,n)\in\mathbb{N}^3$ tel que $i\leqslant k\leqslant n$. Par définition du coefficient binomial

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{k!}{i!\,(k-i)!}=\frac{n!}{(n-k)!i!\,(k-i)!}.$$

D'autre part, on a $n-i\geqslant n-k$ et $i\leqslant n$ et donc

$$\begin{aligned}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}&=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(n-i-(n-k))!}\\&=\frac{n!}{i!}\frac{}{(n-k)!\,(n-i-n+k)!}\\&=\frac{n!}{i!\,(n-k)!\,(k-i)!}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall\,(i,k,n)\in\mathbb{N}^3,\qquad \binom{n}{k}\binom{k}{i}=\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}.}$$

6. Soit $i\in\mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a_k=\binom{k}{i}$.

(a) Premier cas, si $i=0$ ou $i=3$, alors $a_3=\binom{3}{0}=\binom{3}{3}=1$.
Deuxième cas, si $i=1$ ou $i=2$, alors $a_3=\binom{3}{1}=\binom{3}{2}=3$.
Troisième cas, si $i\geqslant 4$, alors par définition, $a_3=0$.
Conclusion,

$$\boxed{a_i=\begin{cases}1 & \text{si } i\in\{0;3\}\\ 3 & \text{si } i\in\{1;2\}\\ 0 & \text{si } i\geqslant 4.\end{cases}}$$

(b) Soit $b = \varphi(a)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{i}.$$

Si $k < i$ alors $\binom{k}{i} = 0$. Premier cas, $i > n$. Dans ce cas, $b_n = 0$. D'autre part, dans ce cas $\binom{n}{i} = 0$ donc on a bien

$$b_n = 0 = 2^{n-i}\binom{n}{i}.$$

On suppose maintenant que $i \leqslant n$. Dès lors,

$$b_n = 0 + \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{i}.$$

Dans ce cas, on a bien $i \leqslant k \leqslant n$. Donc par la question 5.

$$b_n = \sum_{k=i}^{n} \underbrace{\binom{n}{i}}_{\text{indépendant de } k} \binom{n-i}{n-k} = \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{n-k}.$$

On a pour tout $k \in [\![i;n]\!]$, $\binom{n-i}{n-k} = \binom{n-i}{n-i-(n-k)} = \binom{n-i}{k-i}$. Donc

$$b_n = \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{k-i}.$$

Posons $j = k - i$. Dès lors,

$$b_n = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}.$$

Par la question 1. avec $\tilde{n} = n - i$, on a

$$b_n = \binom{n}{i}2^{n-i}.$$

Conclusion, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = 2^{n-i}\binom{n}{i}.}$$

(c) Supposons $i = 0$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \binom{k}{0} = 1$. On est donc dans le cas de la question 1. Or on obtient bien $2^{n-i}\binom{n}{i} = 2^n\binom{n}{0} = 2^n$. On retrouve bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.}$$

Partie 3 : Image des premiers entiers (à ne pas confondre avec la magie des entiers premiers)

On suppose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$ et on pose toujours $b = \varphi(a)$.

7. Si on pose $i = 1$, on a pour tout $k \geqslant 1$, $\binom{k}{i} = \binom{k}{1} = k = a_k$. Si $k = 0$, on a aussi $\binom{k}{i} = \binom{0}{1} = 0 = a_0$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \binom{k}{1}$. Ainsi, par la question 6. pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = 2^{n-i}\binom{n}{i} = 2^{n-1}\binom{n}{1} = n2^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = n2^{n-1}.}$$

8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \end{array}$.

(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus, par dérivation d'une somme finie, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}.$$

D'autre part, par la question 2. on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x+1)^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}.}$$

(b) Prenons $x = 1$. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f'(1) = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k - 0 = b_n.$$

On observe que $b_0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}k = 0 = 0 \times 2^{0-1}$. Donc la formule reste vraie pour $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = n2^{n-1}.}$$

9. *Méthode 3.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} b_n + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}k + \binom{n}{n+1-1}(n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)k + \binom{n}{n}(n+1). \end{aligned}$$

Donc par la formule de Pascal,

$$\begin{aligned} b_n + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}k + n + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}k + \binom{n+1}{n+1}(n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}k \\ &= b_{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+1} = b_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} k.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente,

$$b_{n+1} = b_n + 0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} k.$$

Posons $\tilde{k} = k - 1$ i.e. $k = \tilde{k} + 1$. On a

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \binom{n}{\tilde{k}} \left(\tilde{k} + 1\right) \\ &= b_n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} && \text{car l'indice de sommation est muet} \\ &= b_n + b_n + 2^n && \text{par la question 1.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+1} = 2b_n + 2^n.}$$

(c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad « \ b_n = n2^{n-1} \ ».$$

Initialisation. Si $n = 0$, alors

$$b_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} k = 0 \qquad \text{et} \qquad n2^{n-1} = 0.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie. *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. $b_n = n2^{n-1}$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a par la question précédente

$$\begin{aligned} b_{n+1} = 2b_n + 2^n &= 2\left(n2^{n-1}\right) + 2^n && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= n2^n + 2^n = (n+1)\,2^n. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = n2^{n-1}.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{0 \leqslant i < k \leqslant n} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k-1} 1 \right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k - 0.$$

Donc par ce qui précède,

$$\boxed{\sum_{0 \leqslant i < k \leqslant n} \binom{n}{k} = n2^{n-1}.}$$

Partie 4 : Kronecker n'est pas une marque de bière mais ça rafraichit quand même

On suppose dans cette partie que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ est une suite quelconque et on pose $b = \varphi(a)$. On définit également pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, appelé le symbole de Kronecker.

11. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0;n]\!]$. Alors, Puisque $i \leqslant k \leqslant n$, par la question 5. $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} &= \sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k} \\
&= \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{n-k}(-1)^{n-k} \\
&= \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{n-i-(n-k)}(-1)^{n-k} \\
&= \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{k-i}(-1)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Posons $j = k - i$ i.e. $k = j + i$, on a

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}(-1)^{n-i-j}.$$

On reconnaît alors une somme de Newton, donc

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}(1-1)^{n-i}.$$

Si $i < n$ alors,

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = 0.$$

Si $i = n$, alors

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{n}\sum_{j=0}^{0}\binom{0}{j}(-1)^{0-j} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \delta_{n,i}.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de b_k, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_i \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}a_i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}a_i \\
&= \sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Donc par la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{n,i} = 0 + \cdots + 0 + a_n + 0 + \cdots + 0 = a_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.}$$

13. Soit $(a, a') \in E^2$ tel que $b = \varphi(a) = \varphi(a')$. Donc par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k \\ a'_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a_n = a'_n.$$

Donc la fonction φ est injective.

Soit $b \in E$. On définit alors $a \in E$ de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{-k} \binom{n}{k} b_k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$$

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = (-1)^k b_k$ et $\beta_k = (-1)^k a_k$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \beta_n = (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k.$$

Donc par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (-1)^k a_k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = (-1)^n \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Autrement dit $b = \varphi(a)$. Donc pour tout élément $b \in E$, on a construit un élément $a \in E$ tel que $b = \varphi(a)$. Donc φ est surjective.

Conclusion,

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est bijective.}}$$

Problème II - Fonctions usuelles

On considère la fonction suivante :

$$\mathrm{th} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}. \end{array}$$

On pose ensuite

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right) + \arccos\left(\mathrm{th}(x)\right). \end{array}$$

L'objectif est de montrer que f est une fonction constante.

Partie 1 : Etude de la fonction tangente hyperbolique ou Termite Hystérique si vous préférez

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1 > 0$ donc $\mathrm{ch}(x) \neq 0$. Ainsi la fonction th est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, th est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions qui le sont. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction th est définie et même dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

2. Par définition,

$$\mathrm{th}(0) = \frac{\mathrm{sh}(0)}{\mathrm{ch}(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

De même,

$$\mathrm{th}\left(\ln(2)\right) = \frac{\mathrm{sh}\left(\ln(2)\right)}{\mathrm{ch}\left(\ln(2)\right)} = \frac{\frac{\mathrm{e}^{\ln(2)} - \mathrm{e}^{-\ln(2)}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^{\ln(2)} + \mathrm{e}^{-\ln(2)}}{2}} = \frac{\mathrm{e}^{\ln(2)} - \mathrm{e}^{-\ln(2)}}{\mathrm{e}^{\ln(2)} + \mathrm{e}^{-\ln(2)}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{th}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{th}\left(\ln(2)\right) = \frac{3}{5}.}$$

3. La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est bien centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}\left(-x\right) = \frac{\mathrm{sh}\left(-x\right)}{\mathrm{ch}\left(-x\right)} &= \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \qquad \text{car} \begin{cases} \text{sh est impaire} \\ \text{ch est paire.} \end{cases} \\ &= -\mathrm{th}(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction th est impaire.}}$$

4. On a vu que th est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x).}$$

5. Par la question précédente, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.}$$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on observe que

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

En factorisant par le terme prépondérant, on obtient

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}.$$

Or $\lim_{x \to +\infty} 1 - \mathrm{e}^{-2x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-2x} = 1$. Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de th admet une asymptote horizontale d'équation } y = 1 \text{ en } +\infty.}$$

7. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(x) > 0$. On en déduit que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$. Comme la fonction th est impaire, on en déduit directement que $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$. Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
th	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	1

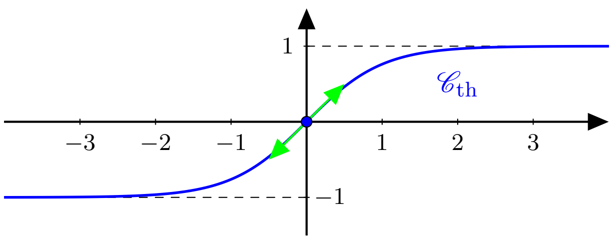
8. Puisque la fonction th est dérivable en 0, elle admet une tangente en ce point d'équation

$$y = \operatorname{th}'(0)\,(x - 0) + \operatorname{th}(0) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(0)} x + 0 = x.$$

Conclusion, l'équation de la tangente en 0 de th est donnée par

$$\boxed{y = x.}$$

9. Par ce qui précède, on a



Partie 2 : Sa réciproque a des arguments pour vous plaire

10. Par ce qui précède :

    - th est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
    - th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

    Donc par le théorème de la bijection, th définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\text{th}(\mathbb{R})$ et de plus, $\text{th}(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty}\text{th}(x); \lim_{x\to+\infty}\text{th}(x)\right[=]-1;1[$. Conclusion,

    $$\boxed{\text{th est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } J =]-1;1[.}$$

    On note $\text{argth} = \text{th}^{-1}$ sa fonction réciproque.

11. Par ce qui précède,

    $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \neq 0.$$

    Par conséquent, on a

    - th est strictement monotone sur $\mathbb{R}$
    - th est dérivable sur $\mathbb{R}$
    - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) \neq 0$.

    Donc par le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, on en déduit que argth est dérivable sur $J =]-1;1[$ et de plus,

    $$\forall x \in]-1;1[, \qquad \text{argth}'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{argth}(x))}.$$

    Or nous avions également vu que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(u) = 1 - \text{th}^2(u)$. D'où

    $$\forall x \in]-1;1[, \qquad \text{argth}'(x) = \frac{1}{1-\text{th}^2(\text{argth}(x))} = \frac{1}{1-(\text{th}(\text{argth}(x)))^2} = \frac{1}{1-x^2},$$

    car argth est la réciproque de th. Conclusion,

    $$\boxed{\text{la fonction argth est dérivable sur }]-1;1[\qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1;1[, \ \text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.}$$

12. Pour tout $x \in]-1;1[$, on observe que

    $$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}.$$

    Vous ne l'avez pas vu directement ? Ok, voici donc une rédaction plus pédestre. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

    $$\begin{aligned}
    & \forall x \in]-1;1[, \qquad \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} \\
    \Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[, \qquad \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a+ax+b-bx}{(1-x)(1+x)} \\
    \Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[, \qquad \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{(a-b)x+a+b}{(1-x)(1+x)}.
    \end{aligned}$$

On note alors **QU'IL SUFFIT** de prendre

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a=b \\ 2a=1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad a=b=\frac{1}{2}.$$

Ainsi, on a

$$\forall x \in\in \left]-1;1\right[, \qquad \frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2\left(1-x\right)}+\frac{1}{2\left(1+x\right)}.$$

Donc par la question précédente,

$$\forall x \in\in \left]-1;1\right[, \qquad \operatorname{argth}'(x)=\frac{1}{2\left(1-x\right)}+\frac{1}{2\left(1+x\right)}.$$

Par primitivation, on obtient

$$\exists C\in\mathbb{R},\ \forall x \in\in \left]-1;1\right[, \qquad \operatorname{argth}(x)=-\frac{1}{2}\ln\left(\left|1-x\right|\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\left|1+x\right|\right)+C.$$

Or pour $x\in\left]-1;1\right[$, $1-x>0$ et $1+x>0$. Donc

$$\exists C\in\mathbb{R},\ \forall x \in\in \left]-1;1\right[, \qquad \operatorname{argth}(x)=-\frac{1}{2}\ln\left(1-x\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+x\right)+C.$$

De plus, $\operatorname{th}(0)=0$ i.e. $0=\operatorname{argth}(0)$. Donc

$$0=\frac{1}{2}\ln(1)+\frac{1}{2}\ln(1)+C \qquad\Leftrightarrow\qquad C=0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\left]-1;1\right[, \qquad \operatorname{argth}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

Encore joli !

13. Soient $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\left]-1;1\right[$. On a les équivalences suivantes :

$$y=\operatorname{th}(x) \qquad\Leftrightarrow\qquad y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \qquad\qquad \text{comme vu à la question 6.}$$

Posons $X=\mathrm{e}^x\in\mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
y=\operatorname{th}(x) \quad&\Leftrightarrow\quad y=\frac{X-\frac{1}{X}}{X+\frac{1}{X}} \\
&\Leftrightarrow\quad y=\frac{X^2-1}{X^2+1} && \text{car } X\neq 0 \\
&\Leftrightarrow\quad y\left(X^2+1\right)=X^2-1 && \text{car } X^2+1\neq 0 \\
&\Leftrightarrow\quad X^2\left(y-1\right)=-1-y \\
&\Leftrightarrow\quad X^2=\frac{1+y}{1-y} && \text{car } y\in\left]-1;1\right[\ \Rightarrow\ 1-y\neq 0 \\
&\Leftrightarrow\quad X=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} && \text{car } \begin{cases} 1+y>0 \text{ et } 1-y>0 \text{ et donc } \frac{1+y}{1-y}>0 \\ X=\mathrm{e}^x>0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^x=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \\
&\Leftrightarrow\quad x=\ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) && \text{car } \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}>0
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $y \in]-1;1[$, l'équation $y = \text{th}(x)$ admet une unique solution donnée par $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. On retrouve bien que $\text{th} : \mathbb{R} \to]-1;1[$ est bijective et que

$$\boxed{\forall y \in]-1;1[, \qquad \text{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$$

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $k^2+3k+1 > 1$ donc $\frac{1}{k^2+3k+1} \in]0;1[\subset]-1;1[$ donc $\text{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$ existe. De plus,

$$\text{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{k^2+3k+1}}{1-\frac{1}{k^2+3k+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2+3k+1+1}{k^2+3k+1-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k^2+3k}\right).$$

D'autre part, on a $k+1 > 1$ et $k+2 > 1$ donc $\frac{1}{k+1} \in]-1;1[$ et $\frac{1}{k+2} \in]-1;1[$ et ainsi, $\text{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right)$ et $\text{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)$ existent. Enfin, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \text{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{k+1}}{1-\frac{1}{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{k+2}}{1-\frac{1}{k+2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{k+1}}{1-\frac{1}{k+1}} \times \frac{1-\frac{1}{k+2}}{1+\frac{1}{k+2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+1+1}{k+1-1} \times \frac{k+2-1}{k+2+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+2}{k} \times \frac{k+1}{k+3}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k^2+3k}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, on observe bien que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \text{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \text{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \text{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right).}$$

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\text{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \text{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)\right).$$

On reconnaît alors une somme télescopique :

$$S_n = \text{argth}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{argth}\left(\frac{1}{n+2}\right).$$

Quand $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{n+2} \to 0$. De plus, la fonction argth est dérivable sur $]-1;1[$ et donc notamment continue en 0. Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\text{argth}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{argth}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)\\
&= \text{argth}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{argth}\,(0)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) - 0\\
&= \frac{1}{2}\ln(3).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\ln(3).}$$

Joli aussi !

Partie 3 : Pi (sur deux) y'a la fonction f aussi

16. On sait que les fonctions arctan et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ et donc $\arctan\circ\mathrm{sh}$ est définie sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x)$ existe et de plus par la partie précédente, $\mathrm{th}(x)\in\,]-1;1[\,\subset[-1;1]$. Or arccos est définie sur $[-1;1]$. Donc $\arccos\circ\mathrm{th}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Par somme, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f=\arctan\circ\mathrm{sh}+\arccos\circ\mathrm{th} \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

17. Par composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $\arctan\circ\mathrm{sh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'autre part, th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{th}(\mathbb{R})=\,]-1;1[$. Or la fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$ donc par composée, $\arccos\circ\mathrm{th}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par somme,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

18. Par définition,

$$\begin{aligned}
f(0) &= \arctan(\mathrm{sh}(0))+\arccos(\mathrm{th}(0))\\
&= \arctan(0)+\arccos(0) && \text{par la question 2.}\\
&= 0+\frac{\pi}{2} && \text{par la question 2.}\\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{u\to+\infty}\arctan(u)=\frac{\pi}{2}$. Donc par composée,

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(\mathrm{sh}(x))=\frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=1$ et $\lim\limits_{u\to1}\arccos(u)=\arccos(1)=0$. Donc par composée,

$$\lim_{x\to+\infty}\arccos(\mathrm{th}(x))=0.$$

Par somme

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}.$$

De la même façon, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan(\mathrm{sh}(x))=\lim_{u\to-\infty}\arctan(u)=-\frac{\pi}{2}.$$

Et

$$\lim_{x\to-\infty}\arccos(\mathrm{th}(x))=\lim_{u\to-1}\arccos(u)=\pi.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(0)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}.}$$

19. On a vu que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{sh}'(x)\arctan'(\mathrm{sh}(x)) + \mathrm{th}'(x)\arccos'(\mathrm{th}(x)) \\ &= \mathrm{ch}(x) \times \frac{1}{1+\mathrm{sh}^2(x)} + \left(1-\mathrm{th}^2(x)\right) \times \frac{-1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)} - \sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}. \end{aligned}$$

Or on se rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x)$. De plus, $1-\mathrm{th}^2(x) = \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} - \sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \qquad \text{car } \mathrm{ch}(x) > 0.$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 0.$$

Super joli !

20. Par la question précédente,

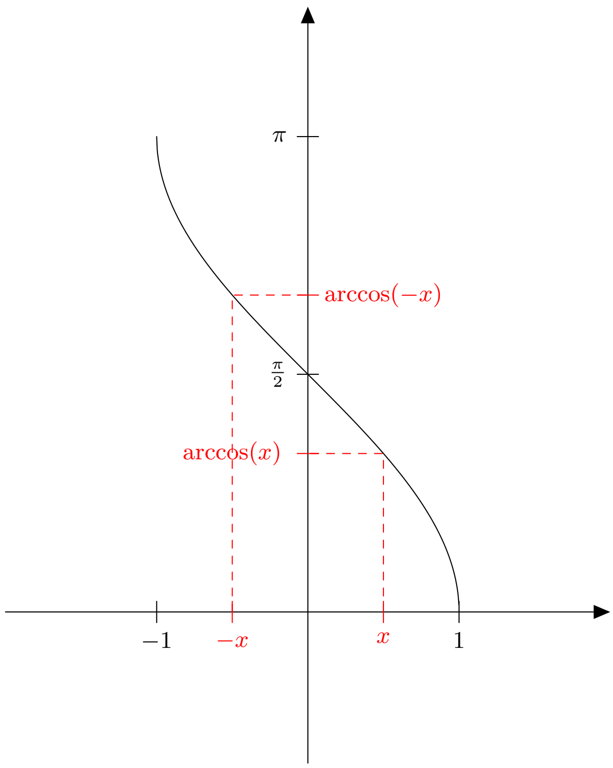
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = C.$$

Or on a vu que $f(0) = \frac{\pi}{2}$ par exemple et donc $C = \frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

Partie 4 : Prenez arccos, sh, arctan, th, sin, cos et touillez très fort

21. (a) On a le graphe suivant :



Le graphe de arccos admet le point $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie, autrement dit, on observe qu'en faisant la moyenne de $\arccos(-x)$ et $\arccos(x)$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad \frac{\arccos(-x) + \arccos(x)}{2} = \frac{\pi}{2}.}$$

(b) Soit $g : x \mapsto \frac{\arccos(-x)+\arccos(x)}{2}$. La fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$, on a $-x \in]-1;1[$ donc par composée $x \mapsto \arccos(-x)$ est dérivable aussi sur $]-1;1[$. Par somme, la fonction g est dérivable sur $]-1;1[$. De plus,

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}\left(-\arccos'(-x) + \arccos'(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1;1[, \qquad g(x) = C.$$

En particulier, $g(0) = \frac{\arccos(0)+\arccos(0)}{2} = \frac{\pi/2+\pi/2}{2} = \frac{\pi}{2}$. Donc $C = \frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[, \qquad \frac{\arccos(-x)+\arccos(x)}{2} = \frac{\pi}{2}.}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \arctan(\operatorname{sh}(-x)) + \arccos(\operatorname{th}(-x)) \\ &= \arctan(-\operatorname{sh}(x)) + \arccos(-\operatorname{th}(x)) && \text{car sh est impaire et par la question 3. th aussi} \\ &= -\arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(-\operatorname{th}(x)) && \text{car arctan est impaire.} \end{aligned}$$

Or par la question précédente, pour tout $u \in]-1;1[$, $\arccos(-u) = \pi - \arccos(u)$. Donc en prenant $u = \operatorname{th}(x) \in]-1;1[$,

$$f(-x) = -\arctan(\operatorname{sh}(x)) + \pi - \arccos(\operatorname{th}(x)) = \pi - f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = \pi - f(x).}$$

On fixe dans la suite $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $a = \operatorname{sh}(x)$, $u = \arctan(a)$, $b = \operatorname{th}(x)$ et $v = \arccos(b)$.

22. Puisque $x \in \mathbb{R}_+$, on a $a = \operatorname{sh}(x) \geqslant 0$ donc $a \in \mathbb{R}_+$ puis $u = \arctan(a) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. De même, si $x \geqslant 0$, alors $\operatorname{th}(x) \geqslant 0$ donc $b = \operatorname{th}(x) \in [0;1[$ et donc $v \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. Conclusion,

$$\boxed{u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\qquad \text{et} \qquad v \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right].}$$

23. On sait que $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$ donc

$$\sin^2(v) = 1 - \cos^2(v) = 1 - \cos^2(\arccos(b)) = 1 - (\cos(\arccos(b)))^2 = 1 - b^2.$$

D'où $\sin(v) = \pm\sqrt{1-b^2}$. Or $v \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin(v) > 0$. Ainsi,

$$\boxed{\sin(\arccos(b)) = \sin(v) = \sqrt{1-b^2}.}$$

24. Puisque $u = \arctan(a) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, on sait que
$$\frac{1}{\cos^2(v)} = \tan'(v) = 1 + \tan^2(v).$$
Or $1 + \tan^2(v) \geqslant 1 > 0$. Donc par passage à l'inverse,
$$\cos^2(v) = \frac{1}{1 + \tan^2(v)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(a))} = \frac{1}{1 + a^2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\cos^2(\arctan(a)) = \frac{1}{1 + a^2}.}$$

25. Par la question précédente, on en déduit que $\cos(\arctan(a)) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Or $u = \arctan(a) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\arctan(a)) > 0$. Ainsi,
$$\boxed{\cos(\arctan(a)) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.}$$

26. Par ce qui précède, on a
$$\sin^2(\arctan(a)) = 1 - \cos^2(\arctan(a)) = 1 - \frac{1}{1 + a^2} = \frac{a^2}{1 + a^2}.$$
Donc
$$\sin(\arctan(a)) = \pm\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{1 + a^2}}.$$
Or $a \in \mathbb{R}_+$ donc $\sqrt{a^2} = a$ donc $\sin(\arctan(a)) = \pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. Or $\arctan(a) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\sin(\arctan(a)) \geqslant 0$. Ainsi,
$$\boxed{\sin(\arctan(a)) = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}.}$$

27. Par définition,
$$\cos(f(x)) = \cos(\arctan(\mathrm{sh}(x)) + \arccos(\mathrm{th}(x))) = \cos(u + v)$$
Par la formule de développement,
$$\cos(f(x)) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v).$$
Or, par ce qui précède :
$$\begin{aligned}
\cos(u) &= \cos(\arctan(a)) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \\
\cos(v) &= \cos(\arccos(b)) = b \\
\sin(u) &= \sin(\arctan(a)) = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \\
\sin(v) &= \sin(\arccos(b)) = \sqrt{1 - b^2}.
\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\cos(f(x)) = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} - \frac{a\sqrt{1 - b^2}}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{b - a\sqrt{1 - b^2}}{\sqrt{1 + a^2}}.$$
En réinjectant les valeurs de $a = \mathrm{sh}(x)$ et $b = \mathrm{th}(x)$:
$$\cos(f(x)) = \frac{\mathrm{th}(x) - \mathrm{sh}(x)\sqrt{1 - \mathrm{th}^2(x)}}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}}.$$

Or $\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \sqrt{\mathrm{ch}^2(x)} = \mathrm{ch}(x)$ car $\mathrm{ch}(x) > 0$. D'autre part, $\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)} = \sqrt{\mathrm{th}'(x)} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ car $\mathrm{ch}(x) > 0$. Ainsi,

$$\cos\left(f(x)\right) = \frac{\mathrm{th}(x) - \mathrm{sh}(x)\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}}{\mathrm{ch}(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(f(x)\right) = 0.}$$

Tout ça pour ça... incroyable !

28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Avec les notations précédentes, on a vu que $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $v \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. Nécessairement,

$$f(x) = u + v \in \left]0; \pi\right[.$$

Or l'unique valeur d'annulation du cosinus sur $]0;\pi[$ est en $\frac{\pi}{2}$. Donc

$$\cos\left(f(x)\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

Nous pourrions tout recommencer pour $x \in \mathbb{R}_-$ mais naturellement, nous allons plutôt utiliser la relation établie en question 21.c Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Posons $y = -x$, alors $y \in \mathbb{R}_+$ donc $f(y) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, par la question 21.c

$$f(x) = \pi - f\left(-x\right) = \pi - f(y) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

Comment douter de la beauté des mathématiques après ça.