Devoir Maison 4
Equations complexes, calcul d'intégrales, équations différentielles

A faire pour le jeudi 05 décembre

Problème I - Equations complexes

Partie 1 : Toujours prendre le problème par la racine

On considère (E) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par

$$(E) \qquad P(z) = z^3 - (1+2i)\,z^2 + 3\,(1+i)\,z - 10\,(1+i) = 0.$$

1. (a) Déterminer l'ensemble des racines carrées de $\omega_0 = 5 + 12i$.
   (b) En déduire les racines carrées de $\omega_1 = -5 - 12i$ et de $\omega_2 = 5 - 12i$.
2. Démontrer que (E) possède une unique solution imaginaire pure. On notera z_1 cette solution.
3. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que
$$P\,(z) = z^3 - (1+2i)\,z^2 + 3\,(1+i)\,z - 10\,(1+i) = (z - z_1)\left(az^2 + bz + c\right).$$
4. Résoudre l'équation (F) suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$,
$$(F) \qquad z^2 - (1+4i)\,z - 5\,(1-i) = 0.$$
5. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Partie 2 : Tournez la tête pour que la réalité devienne imaginaire

6. On fixe dans cette question $z_1 = -2i$, $z_2 = 2 + i$ et $z_3 = -1 + 3i$ et on considère la similitude
$$f : \quad \begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \alpha z + \beta, \end{aligned}$$
où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.
   (a) Démontrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$\begin{cases} f\,(z_2) = z_2 \\ f\,(z_3) = z_1. \end{cases}$$
   (b) On prendra désormais pour α et β les valeurs déterminées à la question précédente. Déterminer la nature précise de f.
   (c) On pose $A\,(z_1)$, $B\,(z_2)$ et $C\,(z_3)$ les points du plan d'affixe z_1, z_2 et z_3 respectivement. Que peut-on en déduire sur le triangle ABC ? Justifier proprement.
7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - z_1)^n = (z + z_1)^n$
   (b) Préciser les solutions lorsque $n = 6$.

Partie 3 : Le lait est encore meilleur pris directement au pi !

Soit $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{7}}$.

8. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k$.

9. En déduire que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 0$.

10. Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer $\cos(3a)$.

11. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est une solution de l'équation $8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0$, d'inconnu $X \in \mathbb{R}$.
    On en cherchera pas à résoudre cette équation.

12. Montrer que
$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}.$$

Problème II - Calcul d'intégrales

Partie 1 : Dans un K, l'angle moitié paraît pleinement adapté...

Dans chaque cas, justifier que l'intégrale existe et la calculer.

1. $I = \displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{t^2(t+1)}\,\mathrm{d}t$

2. $J = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t+1}{t^2 - t + 1}\,\mathrm{d}t$

3. $K = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$

Partie 2 : L'intégrale sur les intégrales (ou presque)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F_k(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\,\mathrm{d}t.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que F_k est définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.
   (b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que F_k est impaire.

5. Préciser F_0.

6. A l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^t$, calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x)$.

7. On suppose ici que $k = 2$.
   (a) Démontrer de même que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_2(x) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{4u}{u^4 + 2u^2 + 1}\,\mathrm{d}u$.
   (b) A l'aide d'un second changement de variable, calculer F_2. Exprimer le résultat en fonction de sh et ch.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que

$$F_k(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que

$$F_{k+2}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\,\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}F_k(x).$$

(c) Déterminer F_3 et F_4

9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que F_k est minorée sur $\mathbb{R}_+$.
10. (a) Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{ch}(t) \geqslant \frac{\mathrm{e}^t}{2}$.
    (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire proprement que F_k est majorée sur $\mathbb{R}_+$ par $\frac{2^k}{k}$.
11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que F_k admet une limite finie en $+\infty$. On note ℓ_k cette limite.
12. Préciser ℓ_1 et ℓ_2.
13. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\ell_{k+2} = \frac{k}{k+1}\ell_k$.
14. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\ell_{2p} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)(2p)!}$.
15. Montrer également que la suite $(k\ell_k\ell_{k+1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est constante et en déduire pour tout $p \in \mathbb{N}$ une expression de ℓ_{2p+1}.

Problème III - Equations différentielles

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x\,\varphi'(x) + \varphi(x) = 0.$$

1. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$. On écrira le résultat sous forme ensembliste et sous forme vectorielle.

Soient b une fonction continue sur $]0;2[$ et (E) l'équation différentielle d'inconnue φ une fonction dérivable sur $]0;2[$ définie par

$$(E) \qquad \forall x \in\,]0;2[\,, \qquad x\,\varphi'(x) + \varphi(x) = b(x)$$

On note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E).

2. On note B une primitive de b sur $]0;2[$. Déterminer $\mathscr{S}_E$ en fonction de B.
   On ne demande pas simplement le résultat mais la démonstration associée.
3. Soit b_0 : $\begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x-1}. \end{array}$ Justifier que b_0 admet des primitives sur $]0;2[$ et les déterminer.
4. En déduire les primitives de $b_1 : x \mapsto 6xb_0(x)$ sur $]0;2[$.
5. Préciser $\mathscr{S}_E$ lorsque $b = b_1$.
6. Déterminer $\mathscr{S}_E$ lorsque $b = b_2$: $\begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x+1}. \end{array}$
7. Déterminer $\mathscr{S}_E$ lorsque $b = b_1 + b_2$.

La suite au prochain épisode héhéhé...