Correction du Devoir Maison 4
équations complexes, calcul d'intégrales, équations différentielles

Du jeudi 05 décembre

Problème I - Equations complexes

Partie 1 : Toujours prendre le problème par la racine

On considère (E) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par

$$(E) \qquad P(z) = z^3 - (1+2i)\, z^2 + 3\,(1+i)\, z - 10\,(1+i) = 0.$$

1. (a) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z^2 = \omega_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 = 5 + 12i \\ |z|^2 = |\omega_0| = |5+12i| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy = 6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \text{car } xy \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z = 3 + 2i \quad \text{OU} \quad z = -3 - 2i.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des racines carrées de ω_0 est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{3 + 2i\ ;\ -3 - 2i\}\,.}$$

(b) On remarque que $\omega_1 = -\,\omega_0 = i^2\,\omega_0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente, on a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z^2 = \omega_1 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = i^2\,\omega_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z}{i}\right)^2 = \omega_0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z}{i} = 3 + 2i \quad \text{OU} \quad \frac{z}{i} = -3 - 2i \\
&\Leftrightarrow \quad z = -2 + 3i \quad \text{OU} \quad z = 2 - 3i.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des racines carrées de ω_1 est

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{-2 + 3i\ ;\ 2 - 3i\}\,.}$$

Pour ω_2, on remarque que $\omega_2 = \overline{\omega_0}$. Par conséquent, toujours d'après la question précédente, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
z^2 = \omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = \overline{\omega_2} \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{z}^2 = \omega_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{z} = 3 + 2i \quad \text{OU} \quad \overline{z} = -3 - 2i \\
&\Leftrightarrow \quad z = 3 - 2i \quad \text{OU} \quad z = -3 + 2i.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des racines carrées de ω_2 est

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \{3-2i\ ;\ -3+2i\}\,.}$$

2. Soit $z \in i\mathbb{R}$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = ix$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad (ix)^3 - (1+2i)(ix)^2 + 3(1+i)(ix) - 10(1+i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -ix^3 + (1+2i)x^2 + 3(i-1)x - 10 - 10i = 0. \end{aligned}$$

Or deux complexes coïncident si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales. De plus, rappelons que $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$z \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 10 = 0 & (E_1) \\ -x^3 + 2x^2 + 3x - 10 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Résolvons (E_1). Soit Δ son discriminant.

$$\Delta = 9 + 40 = 49 = 7^2.$$

Par conséquent,

$$(E_1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3+7}{2} = 5 \quad \text{OU} \quad x = \frac{3-7}{2} = -2.$$

Or, si $x = 5$, on a

$$-x^3 + 2x^2 + 3x - 10 = -125 + 50 + 15 - 10 = -75 + 5 = -70 \neq 0.$$

Donc $x = 5$ n'est pas solution de (E_2).
Si $x = -2$, on a

$$-x^3 + 2x^2 + 3x - 10 = 8 + 8 - 6 - 10 = 0.$$

Donc $x = -2$ est une solution de (E_2). Ainsi,

$$z \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \quad \text{OU} \quad x = 5 \\ x \text{ est solution de } (E_2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

Conclusion, il existe une unique solution imaginaire pure de (E) donnée par

$$\boxed{z_1 = -2i.}$$

3. Soit $(z, a, b, c) \in \mathbb{C}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & P(z) = (z - z_1)\left(az^2 + bz + c\right) \\ \Leftrightarrow \quad & P(z) = (z + 2i)\left(az^2 + bz + c\right) \\ \Leftrightarrow \quad & P(z) = az^3 + bz^2 + cz + 2iaz^2 + 2ibz + 2ic \\ \Leftrightarrow \quad & z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = az^3 + (b+2ia)z^2 + (c+2ib)z + 2ic. \end{aligned}$$

On note alors qu'**il suffit** que le système suivant soit vérifié :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a = 1 \\ -1 - 2i = b + 2ia \\ 3 + 3i = c + 2ib \\ -10 - 10i = 2ic. \end{cases}$$

Or

$$\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - 2i - 2ia = -1 - 2i - 2i = -1 - 4i \\ c = 3 + 3i - 2ib = 3 + 3i + 2i - 8 = -5 + 5i \\ c = \frac{-10-10i}{2i} = -5 + 5i. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Par conséquent SI } a = 1,\ b = -1 - 4i \text{ et } c = -5 + 5i \text{ ALORS } P(z) = (z - z_1)\left(az^2 + bz + c\right).}$$

4. Soit (F) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

(F) $$z^2 - (1 + 4i)\, z - 5\,(1 - i) = 0.$$

Soit Δ le discriminant de (F) : $z^2 - (1 + 4i)\, z - 5\,(1 - i) = 0$. On a

$$\Delta = (1 + 4i)^2 + 20\,(1 - i) = 1 + 8i - 16 + 20 - 20i = 5 - 12i.$$

On remarque que $\Delta = \omega_2$. Donc d'après la question 1.b, les racines carrées de Δ sont $3-2i$ et $-3+2i$. Posons $\delta = 3 - 2i$. Alors les solutions de (F) sont

$$z_2 = \frac{1 + 4i + 3 - 2i}{2} = 2 + i \qquad \text{et} \qquad z_3 = \frac{1 + 4i - 3 + 2i}{2} = -1 + 3i.$$

Conclusion les solutions de (F) sont

$$\boxed{z_2 = 2 + i \quad \text{et} \quad z_3 = -1 + 3i.}$$

5. D'après la question (3.), on a

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad P(z) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (z - z_1)\left(z^2 - (1 + 4i)\, z - 5\,(1 - i)\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad z - z_1 = 0 \quad \text{OU} \quad z^2 - (1 + 4i)\, z - 5\,(1 - i) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad z = z_1 \quad \text{OU} \quad z \text{ est solution de } (F) \\ & \Leftrightarrow \quad z = z_1 \quad \text{OU} \quad z = z_2 \quad \text{OU} \quad z = z_3. \end{aligned}$$

Conclusion l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \{-2i\ ;\ 2 + i\ ;\ -1 + 3i\}.}$$

Partie 2 : Tournez la tête pour que la réalité devienne imaginaire

6. On fixe dans cette question $z_1 = -2i$, $z_2 = 2 + i$ et $z_3 = -1 + 3i$ et on considère la similitude

$$f : \quad \begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \alpha z + \beta, \end{aligned}$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

(a) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $f : z \mapsto \alpha z + \beta$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} f(z_2) = z_2 \\ f(z_3) = z_1 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha z_2 + \beta = z_2 \\ \alpha z_3 + \beta = z_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha(2+i) + \beta = 2+i \\ \alpha(-1+3i) + \beta = -2i \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = 2+i-\alpha(2+i) \\ \alpha(-1+3i) + 2+i-\alpha(2+i) = -2i \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = 2+i-\alpha(2+i) \\ \alpha(-3+2i) = -2-3i. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = 2+i-\alpha(2+i) \\ \alpha = \frac{-2-3i}{-3+2i} = \frac{(-2-3i)(-3-2i)}{9+4} = \frac{6+4i+9i-6}{13} = i. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = 2+i-i(2+i) = 2+i-2i+1 = 3-i \\ \alpha = i. \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, on a trouvé une et une seule solution :

$$\boxed{\begin{cases} f(z_2) = z_2 \\ f(z_3) = z_1. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha, \beta) = (i, 3-i)\,.}$$

(b) Puisque $\alpha = i \neq 1$, on sait que la similitude f possède un unique point fixe. Inutile de le calculer, il est donné par hypothèse par z_2. Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f(z) = \alpha(z - z_2) + z_2 = i(z - z_2) + z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_2) + z_2.$$

$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est une rotation (ici pas de coefficient d'homothétie car } |\alpha| = |i| = 1\text{) de centre } z_2 \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$

(c) D'après la question précédente, A est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Par définition d'une rotation, on a d'une part $BA = BC$ i.e. le triangle ABC est isocèle en B et de plus $\widehat{CBA} = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}$ i.e. ABC est rectangle en B. Conclusion :

$$\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle isocèle en } B.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - z_1)^n = (z + z_1)^n$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(z - z_1)^n = (z + z_1)^n \quad &\Leftrightarrow \quad (z+2i)^n = (z-2i)^n \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z + 2i = (z-2i)\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -2i\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1\right).
\end{aligned}$$

Si $k = 0$, $z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = 0$ et $-2i\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1\right) = -2i \times 2 = -4i \neq 0$. Donc $k = 0$ n'est pas solution. Puis pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, $0 < \frac{2k\pi}{n} < 2\pi$. Donc $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 1$ et $1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 0$. Dès lors, z est solution si et seulement si,

$$\begin{aligned}
\exists k \in [\![1;n-1]\!],\ z &= -2i\frac{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}} \\
&= -2i\frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}\frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}+\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}-\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}} && \text{par factorisation par l'angle moitié} \\
&= -2i\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_n = \left\{ \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \;\middle|\; k \in [\![1;n-1]\!] \right\}.}$$

8. Précisons $\mathscr{S}_6$. Si $n=6$, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_6 &= \left\{ \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)} \;\middle|\; k \in [\![1;5]\!] \right\} \\
&= \left\{ \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} ;\ \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} ;\ \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} ;\ \frac{2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} ;\ \frac{2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \right\} \\
&= \left\{ \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} ;\ \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} ;\ 0 ;\ \frac{-2\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} ;\ \frac{-2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \right\} \\
&= \left\{ 2\sqrt{3} ;\ \frac{2\sqrt{3}}{3} ;\ 0 ;\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} ;\ -2\sqrt{3} \right\}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_6 = \left\{ 2\sqrt{3} ;\ \frac{2\sqrt{3}}{3} ;\ 0 ;\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} ;\ -2\sqrt{3} \right\}.}$$

Partie 3 : Le lait est encore meilleur pris directement au pi !

Soit $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{7}}$.

9. On constate que $\omega^7 = \left(\mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{7}}\right)^7 = \mathrm{e}^{i8\pi} = 1$. Par conséquent $\omega \in \mathbb{U}_7$. De plus $\frac{8\pi}{7} \not\equiv 2\pi\ [2\pi]$ et donc $\omega \neq 1$. Donc d'après le cours,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0}.$$

10. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{6} \omega^k \\
&= 1 + \mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{16\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{24\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{32\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{40\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{48\pi}{7}} \\
&= 1 + \mathrm{e}^{i\frac{(8-14)\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{(14+2)\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{(24-28)\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{(28+4)\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{(40-42)\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{(42+6)\pi}{7}} \\
&= 1 + \mathrm{e}^{-i\frac{6\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}} + \mathrm{e}^{-i\frac{4\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{7}} + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{7}} \\
&= 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{1+2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)=0.}$$

11. Soit $a\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\cos(3a)=\cos(2a+a)&=\cos(2a)\cos(a)-\sin(2a)\sin(a)\\&=\left(2\cos^2(a)-1\right)\cos(a)-2\cos(a)\sin^2(a)\\&=2\cos^3(a)-\cos(a)-2\cos(a)\left(1-\cos^2(a)\right)\\&=2\cos^3(a)-\cos(a)-2\cos(a)+2\cos^3(a).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(3a)=4\cos^3(a)-3\cos(a).}$$

12. (a) En appliquant la question précédente à $a=\frac{2\pi}{7}$, on a

$$\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)=\cos\left(3\times\frac{2\pi}{7}\right)=4\cos^3\left(\frac{2\pi}{7}\right)-3\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

De plus, on a

$$\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)=\cos\left(2\times\frac{2\pi}{7}\right)=2\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)-1.$$

Donc d'après la question 10.,

$$\begin{aligned}0&=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)\\&=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+2\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)-1\right)+2\left(4\cos^3\left(\frac{2\pi}{7}\right)-3\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)\\&=-1-4\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+4\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)+8\cos^3\left(\frac{2\pi}{7}\right).\end{aligned}$$

Donc en posant $X=\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, on observe bien que

$$\boxed{8X^3+4X^2-4X-1=0.}$$

(b) Par la formule d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)&=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{7}}+e^{-i\frac{\pi}{7}}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\frac{2\pi}{7}}+e^{-i\frac{2\pi}{7}}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\frac{3\pi}{7}}+e^{-i\frac{3\pi}{7}}}{2}\right)\\&=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{7}}+e^{-i\frac{\pi}{7}}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\frac{5\pi}{7}}+e^{-i\frac{\pi}{7}}+e^{i\frac{\pi}{7}}+e^{-i\frac{5\pi}{7}}}{4}\right)\\&=\frac{e^{i\frac{6\pi}{7}}+1+e^{i\frac{2\pi}{7}}+e^{-i\frac{4\pi}{7}}+e^{i\frac{4\pi}{7}}+e^{-i\frac{2\pi}{7}}+1+e^{-i\frac{6\pi}{7}}}{8}\\&=\frac{1+1+2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)}{8}.\end{aligned}$$

Donc d'après la question 10., on conclut bien que

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{8}.}$$

Problème II - Calcul d'intégrales

Partie 1 : Dans un K, l'angle moitié paraît pleinement adapté...

Dans chaque cas, justifier que l'intégrale existe et la calculer.

1. (a) Cherchons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t+1}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, on a

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t+1} = \frac{at(t+1) + b(t+1) + ct^2}{t^2(1+t)} = \frac{(a+c)t^2 + (a+b)t + b}{t^2(1+t)}.$$

On note alors que pour obtenir l'égalité désirée **IL SUFFIT** de prendre

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} c = -a = 1 \\ a = -b = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1}.}$$

(b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2(t+1)}$ est définie et même **continue** sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$, en particulier elle est continue sur **le segment** $[-3; -2]$. Donc

$$\boxed{I \text{ existe.}}$$

Dès lors, en utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^{-2} \frac{1}{t^2(t+1)} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-3}^{-2} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1} \, \mathrm{d}t \\ &= \left[\ln(|t|) - \frac{1}{t} + \ln(|t+1|) \right]_{t=-3}^{t=-2} \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2} + \ln(1) - \left(\ln(3) + \frac{1}{3} + \ln(2) \right) \\ &= \frac{1}{6} - \ln(3). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{1}{6} - \ln(3).}$$

Notez que $\ln(3) > \ln(\mathrm{e}) = 1$ *et donc* $I < 0$ *ce qui est bien cohérent avec le fait que* $\frac{1}{t^2(t+1)} < 0$ *pour tout* $t \in [-3; -2]$.

2. Soit Δ le discriminant de $X^2 - X + 1$. On a $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{t+1}{t^2-t+1}$ est bien définie et même **continue** sur $\mathbb{R}$ donc sur **le segment** $[0; 1]$. Conclusion,

$$\boxed{J \text{ existe.}}$$

De plus, on observe que

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 \frac{t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\left|t^2-t+1\right|\right)\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln(1)-\ln(1)}{2} + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{4}{3}\frac{1}{1+\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \textit{car la fonction } \arctan \textit{ est impaire} \\
&= 2\sqrt{3}\frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{J = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}.}$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) \geqslant -1$ donc $2+\cos(t) \geqslant 1 > 0$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{1}{2+\cos(t)}$ est bien définie et même **continue** sur $\mathbb{R}$ et donc sur le **le segment** $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. D'où,

$$\boxed{K \text{ existe.}}$$

On effectue le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Notons que pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\frac{t}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et donc u est bien défini. De plus si $t = 0$, alors $u = 0$ et si $t = \frac{\pi}{2}$, alors $u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Par la formule de l'angle moitié, on a, $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$. Enfin, puisque $t = 2\arctan(u)$. Donc $\mathrm{d}t = \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ Donc,

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{2}{2(1+u^2)+1-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{2}{3+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_{u=0}^{u=1} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0)\right) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{K = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.}$$

Notez que l'on a bien $K \geqslant 0$.

Partie 2 : L'intégrale sur les intégrales (ou presque)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$F_k(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\,\mathrm{d}t.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) > 0$. Donc la fonction $f_k : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}$ est définie et même **continue** sur **l'intervalle** $\mathbb{R}$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse,

   $$\boxed{\text{la fonction } F_k \text{ est définie et même } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

   et est même l'unique primitive de f_k s'annulant en 0 :

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_k'(x) = f_k(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^k(x)}.}$$

   (b) L'ensemble de définition de F_k est $\mathbb{R}$ et donc centré en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $s = -t$. Alors

$t = -s$ et donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}s$.

$$\begin{aligned}
F_k(-x) &= \int_0^{-x} \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{x} -\frac{1}{\mathrm{ch}^k(-s)}\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_0^{x} \frac{1}{\mathrm{ch}^k(s)}\,\mathrm{d}s && \textit{car } \mathrm{ch}^k \textit{ est paire (encore vrai si } k=0\textit{)} \\
&= -F_k(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } F_k \text{ est impaire.}}$$

5. Si $k = 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_0(x) = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x.$$

Conclusion,

$$\boxed{F_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $u = \mathrm{e}^t$ i.e. $t = \ln(u)$ et donc $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\left[\arctan(u)\right]_{u=1}^{u=\mathrm{e}^x} \\
&= 2\left(\arctan(\mathrm{e}^x) - \arctan(1)\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_1(x) = 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}.}$$

7. On suppose ici que $k = 2$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose à nouveau $u = \mathrm{e}^t$ i.e. $t = \ln(u)$ et donc $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$. Alors,

$$\begin{aligned}
F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{4}{\left(u + \frac{1}{u}\right)^2} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{4}{u^2 + 2 + \frac{1}{u^2}} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{4u}{u^4 + 2u^2 + 1}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_2(x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{4u}{u^4 + 2u^2 + 1}\,\mathrm{d}u.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $v = u^2$ i.e. $u = \sqrt{v}$ et donc $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}v}{2\sqrt{v}}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{4u}{u^4 + 2u^2 + 1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^{2x}} \frac{4\sqrt{v}}{v^2 + 2v + 1} \times \frac{\mathrm{d}v}{2\sqrt{v}} \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^{2x}} \frac{2}{(v+1)^2}\,\mathrm{d}v \\
&= \left[-\frac{2}{v+1}\right]_{v=1}^{v=\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{2}{1+1} - \frac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}+1-2}{\mathrm{e}^{2x}+1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.
\end{aligned}$$

Par « factorisation par l'angle moitié », on remarque que

$$F_2(x) = \frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\right)} = \frac{2\,\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}(x)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_2(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

(a) Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} u(t) = \mathrm{sh}(t) \\ v(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} u'(t) = \mathrm{ch}(t) \\ v'(t) = -(k+1)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
F_k(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{car } \mathrm{ch}(t) > 0 \\
&= \left[\mathrm{sh}(t)\frac{1}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\left(-(k+1)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} - 0 + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{F_k(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(x)}\,\mathrm{d}t.}$$

(b) On sait que $\mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x) - 1$. Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
F_k(x) &= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(x)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{ch}^2(t)-1}{\mathrm{ch}^{k+2}(x)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^{k}(x)}\,\mathrm{d}t - (k+1)\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^{k+2}(x)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\,F_k(x) - (k+1)\,F_{k+2}(x).
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$(k+1)\,F_{k+2}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\,F_k(x) - F_k(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + kF_k(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{F_{k+2}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\,\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}F_k(x).}$$

(c) Par la question 3, en prenant $k = 1$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_3(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}^2(x)} + \frac{1}{2}F_1(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}^2(x)} + \frac{1}{2}\left(2\arctan\left(\mathrm{e}^x\right) - \frac{\pi}{2}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_3(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}^2(x)} + \arctan\left(\mathrm{e}^x\right) - \frac{\pi}{4}.}$$

De même, à l'aide de la question 4, en prenant $k = 2$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_4(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{3\,\mathrm{ch}^3(x)} + \frac{2}{3}F_2(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{3\,\mathrm{ch}^3(x)} + \frac{2\,\mathrm{sh}(x)}{3\,\mathrm{ch}(x)} = \frac{\left(1+2\,\mathrm{ch}^2(x)\right)\mathrm{sh}(x)}{3\,\mathrm{ch}^3(x)}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_4(x) = \frac{\left(1+2\,\mathrm{ch}^2(x)\right)\mathrm{sh}(x)}{3\,\mathrm{ch}^3(x)}.}$$

9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{ch}(t) > 0$ donc $\frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)} > 0$. Donc par la croissance de l'intégrale, car $x \geqslant 0$ (bornes dans le bon sens), on a

$$F_k(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_k(x) \geqslant 0$ i.e.

$$\boxed{F_k \text{ est minorée par } 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

10. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathrm{ch}(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \geqslant \frac{\mathrm{e}^t}{2},$$

car $\mathrm{e}^{-t} > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \mathrm{ch}(t) \geqslant \frac{\mathrm{e}^t}{2}.}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente et la croissance de la fonction $x \mapsto x^k$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \mathrm{ch}^k(t) \geqslant \frac{\mathrm{e}^{kt}}{2^k} > 0$$

Alors, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)} \leqslant \frac{2^k}{\mathrm{e}^{kt}} = 2^k \,\mathrm{e}^{-kt}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par croissance de l'intégrale, car $x \geqslant 0$ (bornes dans le bon sens), on obtient

$$F_k(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x 2^k \,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t.$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_0^x 2^k \,\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t &= \left[-2^k \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{k}\right]_{t=0}^{t=x} \qquad\qquad \text{car } k \neq 0\\ &= 2^k \frac{1}{k} - \underbrace{2^k \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k}}_{\geqslant 0}\\ &\leqslant \frac{2^k}{k}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_k(x) \leqslant \frac{2^k}{k} \qquad \leftarrow \textit{indépendant de } x.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on en conclut que

$$\boxed{F_k \text{ est majorée sur } \mathbb{R}_+ \text{ par } \frac{2^k}{k}.}$$

11. Par la question 1, la fonction F_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_k'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^k(x)} > 0$. Par conséquent F_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et nous venons de voir que F_k est majorée sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F_k(x) \text{ existe.}}$$

On note ℓ_k cette limite.

12. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x) = 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$. Or $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $\arctan(u) \xrightarrow[u \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$. Par composition,

$$\lim_{x \to +\infty} F_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}\right) = 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\ell_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_2(x) = \frac{2\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Or on a déjà vu dans l'exercice I que $\mathrm{sh}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \mathrm{ch}(x)$ i.e. $\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$. Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} F_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\ell_2 = 1.}$$

13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On sait d'après la question 5 que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_{k+2}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{(k+1)\operatorname{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}F_k(x).$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{(k+1)\operatorname{ch}^{k+1}(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{k+1}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\frac{1}{\operatorname{ch}^k(x)} = \frac{1}{k+1} \times 1 \times 0,$$

ceci est justifié car $k \geqslant 1$ et donc $\operatorname{ch}^k(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. D'où,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{(k+1)\operatorname{ch}^{k+1}(x)} = 0.$$

Donc par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient,

$$\ell_{k+2} = 0 + \frac{k}{k+1}\ell_k.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell_{k+2} = \frac{k}{k+1}\ell_k.}$$

14. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(p) : \qquad « \ \ell_{2p} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)(2p)!} \ »$$

Démontrons que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie par récurrence.

Initialisation. Si $p = 1$, alors

$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)(2p)!} = \frac{2^2(1!)^2}{(2)(2)!} = \frac{4}{2\times 2} = 1.$$

Or nous avons vu que $\ell_2 = 1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(p) \Rightarrow \mathscr{P}(p+1)$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ i.e. $\ell_{2p} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)(2p)!}$. Montrons alors $\mathscr{P}(p+1)$. On a

$$\begin{aligned}
\ell_{2(p+1)} = \ell_{2p+2} &= \frac{2p}{2p+1}\ell_{2p} && \textit{par la question 10 avec } k = 2p \in \mathbb{N}^* \\
&= \frac{2p}{2p+1}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)(2p)!} && \textit{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{2p}{2p+1}\frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+2)(2p+2)!}\frac{(2p+2)(2p+2)(2p+1)}{2^2(p+1)^2(2p)} \\
&= \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+2)(2p+2)!}\frac{(2p+2)(2p+2)}{2^2(p+1)^2} \\
&= \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+2)(2p+2)!}\frac{4(p+1)(p+1)}{2^2(p+1)^2} \\
&= \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+2)(2p+2)!}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que $\mathscr{P}(p+1)$ est alors vraie.

Conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell_{2p} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)(2p)!}.}$$

15. Calculons, pour $k=1$, on a par la question 9,

$$k\ell_k\ell_{k+1} = \ell_1\ell_2 = \frac{\pi}{2}\times 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Posons pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$: « $k\ell_k\ell_{k+1}=\frac{\pi}{2}$ ».

Initialisation. Par le calcul précédent, on a $\mathscr{P}(1)$ qui est vraie.

Hérédité. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ et montrons $\mathscr{P}(k+1)$. On a

$$\begin{aligned}(k+1)\ell_{k+1}\ell_{k+2} &= (k+1)\ell_{k+1}\frac{k}{k+1}\ell_k && \textit{par la question 10}\\ &= k\ell_{k+1}\ell_k \\ &= \frac{\pi}{2} && \textit{par hypothèse de récurrence.}\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est aussi vraie.

Conclusion, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

D'où, la suite $(k\ell_k\ell_{k+1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est constante :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad k\ell_k\ell_{k+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On en déduit alors que

$$2p\ell_{2p}\ell_{2p+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Or par la question précédente, $\ell_{2p}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)(2p)!}\neq 0$. Donc

$$\ell_{2p+1}=\frac{\pi}{4p\ell_{2p}}=\frac{\pi\,(2p)\,(2p)!}{4p\times 2^{2p}\,(p!)^2}=\frac{\pi\,(2p)!}{2^{2p+1}\,(p!)^2}.$$

Si $p=0$, on observe que

$$\frac{\pi\,(2p)!}{2^{2p+1}\,(p!)^2}=\frac{\pi}{2}=\ell_1.$$

La formule reste donc vraie. Conclusion,

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\qquad \ell_p=\frac{\pi\,(2p)!}{2^{2p+1}\,(p!)^2}.}$$

Problème III - Equations différentielles

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E_0)\qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad x\,\varphi'(x)+\varphi(x)=0.$$

1. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $x\neq 0$, on a

$$(E_0)\qquad\Leftrightarrow\qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \varphi'(x)+\frac{1}{x}\,\varphi(x)=0.$$

La fonction $a : x\mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par $A : x\mapsto \ln(x)$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathscr{S}_{E_0}=\left\{ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-\ln(x)}\end{array} \,\middle|\, C\in\mathbb{R}\right\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_{E_0}=\left\{ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{C}{x}\end{array} \,\middle|\, C\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{x}\end{array}\right).}$$

Soient b une fonction continue sur $]0;2[$ et (E) l'équation différentielle d'inconnue φ une fonction dérivable sur $]0;2[$ définie par

$$(E) \qquad \forall x \in \,]0;2[\,, \qquad x\,\varphi'(x) + \varphi(x) = b(x)$$

On note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E).

2. On note B une primitive de b sur $]0;2[$. Soit φ une fonction dérivable sur $]0;2[$. Notons

$$\varphi_0 \; : \; \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

Par la question précédente, on sait que φ_0 est une solution de l'équation homogène associée à (E) Soit $\lambda : \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)} \end{array}$ qui est bien définie car pour tout $x \in \,]0;2[$, $\varphi_0(x) \neq 0$. De plus en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0;2[$ dont le dénominateur ne s'annule pas, λ est dérivable sur $]0;2[$ et pour tout $x \in \,]0;2[$, $\varphi(x) = \lambda(x)\,\varphi_0(x)$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \varphi'(x) + \frac{1}{x}\,\varphi(x) = \frac{b(x)}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \lambda'(x)\,\varphi_0(x) + \lambda(x)\,\varphi_0'(x) + \frac{1}{x}\,\lambda(x)\,\varphi_0(x) = \frac{b(x)}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \lambda'(x)\,\varphi_0(x) + \lambda(x)\underbrace{\left(\varphi_0'(x) + \frac{1}{x}\,\varphi_0(x)\right)}_{=0 \text{ car } \varphi_0 \text{ solution homogène}} = \frac{b(x)}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{b(x)}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \lambda'(x) = b(x).
\end{aligned}$$

Puisque B est une primitive de b sur $]0;2[$:

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{C},\ \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \lambda(x) = B(x) + C \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \varphi(x) = \lambda(x)\,\varphi_0(x) = \frac{B(x)+C}{x}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{B(x)+C}{x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3. Soit $b_0 : \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2 - \frac{3}{2}x - 1}. \end{array}$ Soit Δ le discriminant associé à $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$. On a $\Delta = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$. Donc les racines de $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$ sont $\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2} = \frac{8}{4} = 2$ et $\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. Puisque $-\frac{1}{2} < 0$. On en déduit que

$$\forall x \in \,]0;2[\,, \qquad x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \neq 0.$$

Donc la fonction b_0 est bien définie et même continue sur $]0;2[$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } b_0 \text{ admet des primitives sur }]0;2[.}$$

De plus, pour $x \in \,]0;2[$, on a

$$b_0(x) = \frac{1}{x^2 - \frac{3}{2}x - 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2)}.$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, on sait qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \left]0;2\right[, \qquad b_0(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+\frac{1}{2}}.$$

Méthode 1. Pour tout $x \in]0;2[$,

$$(x-2)\,b_0(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = a + (x-2)\,\frac{b}{x+\frac{1}{2}}.$$

Donc par passage à la limite quand $x \to 2$,

$$a = \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}.$$

De même, cette égalité peut s'étendre à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};2\right[$ et

$$\left(x+\frac{1}{2}\right) b_0(x) = \frac{1}{x-2} = \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{x-2} + b.$$

Donc par passage à la limite quand $x \to -\frac{1}{2}$,

$$a = \frac{1}{-\frac{1}{2}-2} = -\frac{2}{5}.$$

Donc

$$\forall x \in \left]0;2\right[, \qquad b_0(x) = \frac{2/5}{x-2} - \frac{2/5}{x+\frac{1}{2}}.$$

Méthode 2. Pour tout $x \in]0;2[$, on a

$$b_0(x) = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)} = \frac{a\left(x+\frac{1}{2}\right)+b\,(x-2)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)} = \frac{(a+b)\,x+\frac{a}{2}-2b}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)}.$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} a+b=0 \\ \frac{a}{2}-2b=1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a+b=0 \\ -\frac{5}{2}b=1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a=-b=\frac{2}{5} \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

On retrouve bien que

$$\forall x \in \left]0;2\right[, \qquad b_0(x) = \frac{2/5}{x-2} - \frac{2/5}{x+\frac{1}{2}}.$$

Donc la fonction définie pour tout $x \in]0;2[$,

$$B_0(x) = \frac{2}{5}\left(\ln\left(|x-2|\right) - \ln\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|\right)\right) = \frac{2}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+\frac{1}{2}}\right)$$

est une primitive de b_0. Conclusion, l'ensemble des primitives de b_0 est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{b_0} = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+\frac{1}{2}}\right)+C \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4. Soit $b_1 : \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 6xb_0(x) = \frac{6x}{x^2-\frac{3}{2}x-1}. \end{array}$ Posons pour tout $x \in]0;2[$, $u(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$. La fonction u est dérivable sur $]0;2[$ (et même sur $\mathbb{R}$) et pour tout $x \in]0;2[$,
$$u'(x) = 2x - \frac{3}{2}.$$
Alors, on observe que (après une division euclidienne si nécessaire)
$$6x = 3\left(2x - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{2}.$$
Donc
$$\forall x \in]0;2[\,, \qquad b_1(x) = 3\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{9}{2}b_0(x).$$
Donc, à l'aide de la question précédente, une primitive de b_1 est donnée pour tout $x \in]0;2[$ par
$$\begin{aligned} B_1(x) &= 3\ln(|u(x)|) + \frac{9}{2} \times \frac{2}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+\frac{1}{2}}\right) \\ &= 3\ln\left(1 + \frac{3}{2}x - x^2\right) + \frac{9}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+\frac{1}{2}}\right) \\ &= 3\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)(2-x)\right) + \frac{9}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+\frac{1}{2}}\right) \\ &= 3\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + 3\ln(2-x) + \frac{9}{5}\ln(2-x) - \frac{9}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{24}{5}\ln(2-x) + \frac{6}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$
Conclusion, l'ensemble des primitives de b_1 est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}_{b_1} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{24}{5}\ln(2-x) + \frac{6}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + C \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5. Par la question précédente, B_1 est une primitive de b_1. Donc par la question 2., on a directement,
$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\frac{24}{5}\ln(2-x)+\frac{6}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+C}{x} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

6. Soit $b_2 : \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x+1} \end{array}$. Soit Δ le discriminant associé à $X^2 - \frac{3}{2}X + 1$, on a $\Delta = \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4} < 0$. Donc la fonction b_2 est bien continue sur $]0;2[$ et admet des primitives sur cet intervalle. Faisons apparaître la dérivée de la fonction arctangente. Pour tout $x \in]0;2[$, on a
$$b_2(x) = \frac{1}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 1} = \frac{1}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{16}{7}\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)^2 + 1} = \frac{16}{7}\frac{1}{1+\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)^2}.$$
Donc une primitive de b_2 est donnée pour tout $x \in]0;2[$ par
$$B_2(x) = \frac{16}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right) = \frac{4\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right).$$
Donc par la question 2. dans ce cas,
$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\frac{4\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)+C}{x} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

7. *Rédaction 1.* Par ce qui précède, la fonction $x \mapsto \frac{B_1(x)}{x}$ est UNE solution de (E) lorsque $b = b_1$ et $x \mapsto \frac{B_2(x)}{x}$ est UNE solution (E) lorsque $b = b_2$. Donc par le principe de superposition, la fonction $x \mapsto \frac{B_1(x)+B_2(x)}{x}$ est UNE solution de (E) lorsque $b = b_1 + b_2$. Donc à l'aide des solutions de l'équation homogène données par la question 1. on obtient que

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\frac{24}{5}\ln(2-x)+\frac{6}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{4\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)+C}{x} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

Rédaction 2. Par ce qui précède, B_1 est une primitive de b_1 et B_2 est une primitive de b_2, donc $B_1 + B_2$ est une primitive de $b_1 + b_2$. Donc par la question 2. on obtient

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\frac{24}{5}\ln(2-x)+\frac{6}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{4\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)+C}{x} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}}.$$