Devoir Maison 5
équations différentielles, matrices, analyse asymptotique

A faire pour le jeudi 09 janvier

Problème I - Equations différentielles d'ordre 2

Partie 1 : Zigzaguons un zeste parmi ces zouaves de z

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(F) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = t^2 + 3.$$

1. Résoudre (F_0) l'équation homogène associée à (F).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (F).

Partie 2 : Transformer y en φ n'est pas faire fi du problème mais bien le simplifier

On considère l'équation suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(G) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0.$$

3. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{y(x)}{x} \end{array}$ puis $\varphi = \psi'$.
   (a) Justifier que φ existe et est même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que
   $$y \text{ est solution de } (G) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.}$$
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (G).
4. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$.
   (a) Justifier que z est deux fois dérivable et montrer que y est solution de (G) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.
   (b) En déduire à nouveau l'ensemble des solutions de (G).

Partie 3 : Kèskecékeça ? Une équation fonctionnelle ? ça mord pas au moins ?

On considère l'équation fonctionnelle suivante d'inconnue f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(H) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

5. Montrer que si f est une solution de (H) alors f est une solution de (G).
6. Résoudre (H).

Problème II - Matrices

Dans ce problème, on considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de ce problème est de calculer les puissances de la matrice A de plusieurs façons différentes.

Partie 1 : Newton ouvre le jeu en travaillant en binôme

On considère

$$J = \frac{1}{4}(A + 3I_3)$$

1. Calculer J^2.
2. En déduire J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que :

$$(\bigstar) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n)\, J$$

4. En déduire A^n en fonction de ses coefficients pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que la formule $(\bigstar)$ reste valable pour $n = -1$.
6. Montrer que la formule $(\bigstar)$ reste valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Partie 2 : Euclide reprend l'avantage en divisant l'équipe adverse

7. Calculer $A^2 + 2A$, puis en déduire un polynôme annulateur $P(X)$ de la matrice A de degré 2.
8. En déduire à nouveau que A est inversible et que son inverse est un polynôme en A.
9. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. En déduire A^n en fonction de ses coefficients pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie 3 : Gauss se pose en pivot du match

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{S}_\lambda)$ l'équation suivante d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_\lambda) \ : \ (\lambda\, I_3 - A)\, X = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On note $\mathscr{S}_\lambda$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}_\lambda)$.

11. Déterminer suivant les valeurs de λ, l'ensemble $\mathscr{S}_\lambda$.
12. On note λ_1 et λ_2, $\lambda_1 < \lambda_2$ les deux réels pour lesquels $\mathscr{S}_\lambda \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Vérifier que $\lambda_1 + 2\,\lambda_2 = \mathrm{Tr}\,(A)$.
13. On pose $e_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, calculer Ae_i et en déduire que $e_i \in \mathscr{S}_{\lambda_1}$ ou $e_i \in \mathscr{S}_{\lambda_2}$.

Partie 4 : Un but en diagonale conclut la rencontre

On considère la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. On admet dans cette question que P est inversible.
    Montrer, sans calculer P^{-1}, que $\mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{Tr}\left(A\right)$.
15. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
16. Calculer $D = P^{-1}AP$. Préciser $\mathrm{Tr}\left(D\right)$, est-ce cohérent ?
17. Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
18. Le résultat précédent reste-t-il vrai pour $n = -1 \in \mathbb{Z}$?
19. En déduire A^n en fonction de ses coefficients pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice III - Analyse Asymptotique

1. Soit $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-\cos(x)} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$. A l'aide d'un développement limité à un ordre bien choisi,
   (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$. On note encore f la fonction prolongée.
   (b) Justifier que la fonction prolongée f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et préciser $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente de la fonction $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-\cos(x)} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$ ainsi que la position relative du graphe de f par rapport à cette tangente au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer le comportement asymptotique de $g : x \mapsto \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et notamment la position relative de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Problème IV - Analyse Asymptotique

1. Justifier que la fonction sh est bijective.

On note $\operatorname{argsh} = \operatorname{sh}^{-1}$ sa réciproque. L'objectif est de montrer l'existence d'un développement limité de argsh à l'ordre 5 en 0 et de le déterminer de différentes façons. Les parties sont indépendantes et, sauf mention contraire, on ne pourra pas utiliser les résultats de l'une pour répondre à une autre.

Partie 1 : Faisons connaissance

2. Déterminer le domaine de continuité de argsh et dresser son tableau de variation.

3. Justifier que argsh admet un développement limité à l'ordre 0 et le déterminer.

Partie 2 : Un mariage avec sh réussi

On suppose dans cette partie que argsh admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, noté

$$\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o\left(x^5\right).$$

4. Sans calcul, montrer que $a_0 = a_2 = a_4 = 0$.

5. Rappeler le développement limité de sh à l'ordre 5 en 0. A l'aide de l'égalité $\operatorname{argsh}(\operatorname{sh}(x)) = x$, en déduire celui de argsh.

Partie 3 : Parce que ch est jaloux

On suppose toujours que argsh admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 et on admet qu'il est donné par

$$\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + a_3x^3 + a_5x^5 + o\left(x^5\right),$$

avec a_3 et a_5 à déterminer.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$.

7. Préciser le développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\sqrt{1+x^2}$

8. En déduire à nouveau le développement limité de argsh à l'ordre 5 en 0.

Partie 4 : En laissant couler (ou dériver quoi) les choses s'arrangent

9. Justifier que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer sa dérivée. *On pourra utiliser le résultat de la question 6.*

10. Sans le calculer, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, argsh admet un développement limité à l'ordre n en 0.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le développement limité de argsh à l'ordre $2n+1$ et préciser le cas, celui d'ordre 5.

Partie 5 : Finalement ce n'était qu'un logarithme qui ne s'assumait pas

12. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $y = \operatorname{sh}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

13. Préciser alors une expression de argsh en fonction du logarithme et en déduire à nouveau un développement limité à l'ordre 5 en 0 de argsh.