Correction du Devoir Maison 5 équations différentielles, matrices, analyse asymptotique

Du jeudi 09 janvier

Problème I - Equations différentielles d'ordre 2

Partie 1 : Zigzaguons un zeste parmi ces zouaves de z

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(F) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = t^2 + 3.$$

1. L'équation homogène associée à (F) est donnée par

$$(F_0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0.$$

Son équation caractéristique est donnée par (F_c) : $r^2 - 2r + 1 = 0$ i.e. $(r-1)^2 = 0$. Donc cette équation admet une unique racine double $r_0 = 1$. Conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation homogène(F_0) est

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (At+B)\,\mathrm{e}^t \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^t \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t\,\mathrm{e}^t \end{array} \right).}$$

2. Cherchons une solution particulière sous forme d'un polynôme du second degré. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $z_p : t \mapsto at^2 + bt + c$. La fonction z_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} z_p \text{ solution de } (F) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & 2a - 2(2at+b) + at^2 + bt + c = t^2 + 3 \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & at^2 + (b-4a)\,t + 2a - 2b + c = t^2 + 3. \end{array}$$

Pour que la dernière assertion soit vraie, on note qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ 2a - 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4a = 4 \\ c = 3 - 2a + 2b = 3 - 2 + 8 = 9. \end{cases}$$

Donc $z_p : t \mapsto t^2 + 4t + 9$ est une solution de (F). Conclusion, à l'aide de la question précédente, l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 + 4t + 9 + (At+B)\,\mathrm{e}^t \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie 2 : Transformer y en φ n'est pas faire fi du problème mais bien le simplifier

On considère l'équation suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(G) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0.$$

3. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{y(x)}{x} \end{array}$ puis $\varphi = \psi'$.

(a) La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ aussi (car $x \neq 0$). Donc par produit, la fonction ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est bien définie et même dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = x\psi(x)$. Donc $y'(x) = \psi(x) + x\,\varphi(x)$ et $y''(x) = \varphi(x) + \varphi(x) + x\,\varphi'(x) = x\,\varphi'(x) + 2\,\varphi(x)$. Dès lors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} & y \text{ est solution de } (G) & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^2\left(x\,\varphi'(x) + 2\,\varphi(x)\right) - x\left(x\,\varphi(x) + \psi(x)\right) + x\psi(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^3\,\varphi'(x) + x^2\,\varphi(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \varphi'(x) + \dfrac{1}{x}\,\varphi(x) = 0 \qquad \text{car } x \neq 0 \end{array}$$

Posons

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) + \frac{1}{x}\,\varphi(x) = 0$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{y \text{ est solution de } (G) \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ est solution de } (E).}$$

(b) La fonction $a : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives dont $A : x \mapsto \ln(|x|) = \ln(x)$. Donc l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K\,\mathrm{e}^{-\ln(x)} \end{array} \,\middle|\, K \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{K}{x} \end{array} \,\middle|\, K \in \mathbb{R} \right\}.$$

Avec les notations de la question précédente, on obtient,

$$\begin{array}{llll} y \text{ est solution de } (G) & \Leftrightarrow & \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \varphi(x) = \dfrac{A}{x} \\ & \Leftrightarrow & \exists\,(A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \psi(x) = A\ln(|x|) + B \\ & \Leftrightarrow & \exists\,(A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & y(x) = x\psi(x) = Ax\ln(|x|) + Bx. \end{array}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (G) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_G = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ax\ln(x) + Bx \end{array} \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

4. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$.

(a) La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composition,

$$\boxed{\text{la fonction } z = y \circ \exp \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$y(x) = z\left(\ln(x)\right), \qquad y'(x) = \frac{1}{x}z'\left(\ln(x)\right), \qquad y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'\left(\ln(x)\right) + \frac{1}{x^2}z''\left(\ln(x)\right).$$

Dès lors, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} & y \text{ est solution de } (G) & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^2\left(\dfrac{1}{x^2}z''\left(\ln(x)\right) - \dfrac{1}{x^2}z'\left(\ln(x)\right)\right) - x\left(\dfrac{1}{x}z'\left(\ln(x)\right)\right) + z\left(\ln(x)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & z''\left(\ln(x)\right) - z'\left(\ln(x)\right) - z'\left(\ln(x)\right) + z\left(\ln(x)\right) = 0. \end{array}$$

En posant $x = \mathrm{e}^t$ i.e. $t = \ln(x)$, lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$, t décrit $\mathbb{R}$ et on obtient donc

$$y \text{ est solution de } (G) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{y \text{ est solution de } (G) \qquad \Leftrightarrow \qquad z \text{ est solution de } (F_0).}$$

(b) Avec les notations de la question précédente, par la question 1.

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de } (G) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad z(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^t \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y(x) = z\left(\ln(x)\right) = \left(A\ln(x) + B\right)x
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que l'ensemble des solutions de (G) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_G = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ax\ln(x) + Bx \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie 3 : Kèskecékeça ? Une équation fonctionnelle ? ça mord pas au moins ?

On considère l'équation fonctionnelle suivante d'inconnue f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(H) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

5. Soit f une solution de (H). Par hypothèse, la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Or les fonctions $x \mapsto x$, f et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composition et produit, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Autrement dit : la fonction f est deux fois dérivable. Dès lors, en dérivant l'équation H on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}xf'\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or par l'équation (H) utilisée avec $\tilde{x} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}f(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}f(x)$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x^2f''(x) - xf'(x) + f(x) &= x^2\left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}f(x)\right) - x\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) + f(x) \\
&= x^2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) - x^2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est solution de } (H) \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ est solution de } (G).}$$

6. Par la question précédente, si f est une solution de (H) alors f est une solution de (G). Donc par la partie 3,
$$\exists\,(A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad f(x)=Ax\ln(x)+Bx.$$
Procédons à la synthèse et cherchons parmi les fonctions de ce type, lesquelles sont solutions de (H). Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ et soit $f:x\mapsto Ax\ln(x)+Bx$. Alors, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, d'une part,
$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad f'(x)=A\ln(x)+\frac{Ax}{x}+B=A\ln(x)+A+B.$$
D'autre part,
$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad xf\left(\frac{1}{x}\right)=x\left(A\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)+B\frac{1}{x}\right)=-A\ln(x)+B.$$
Dès lors, on a
$$f \text{ solution de } (H)\qquad\Leftrightarrow\qquad\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad A\ln(x)+A+B=-A\ln(x)+B.$$
En particulier, pour $x=1$, on trouve qu'il faut prendre $A+B=B$ i.e. $A=0$. Réciproquement, si $A=0$, on a bien $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $A\ln(x)+A+B=-A\ln(x)+B$. D'où
$$f \text{ solution de } (H)\qquad\Leftrightarrow\qquad A=0\qquad\Leftrightarrow\qquad\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad f(x)=Bx.$$
Conclusion, l'ensemble des solutions de (H) est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}_H=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & Bx\end{array}\,\middle|\, B\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x\end{array}\right).}$$

Problème II - Matrices

Dans ce problème, on considère la matrice A suivante :
$$A=\begin{pmatrix}-7&0&-8\\4&1&4\\4&0&5\end{pmatrix}.$$
L'objectif de ce problème est de calculer les puissances de la matrice A de plusieurs façons différentes.

Partie 1 : Newton ouvre le jeu en travaillant en binôme

On considère
$$J=\frac{1}{4}(A+3I_3)$$

1. Par définition,
$$J=\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}-7&0&-8\\4&1&4\\4&0&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4&0&-8\\4&4&4\\4&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}.$$
Par suite,
$$J^2=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}.$$
Conclusion,
$$\boxed{J^2=J.}$$

2. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$: « $J^k = J$ ». Procédons par récurrence.

   Initialisation. Si $k = 1$, alors $J^1 = J$ et donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie et montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} J^{k+1} = J^k J = JJ &= J^2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= J && \text{d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

   Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et donc

$$\boxed{J^k = \begin{cases} J & \text{si } k \geqslant 1 \\ I_3 & \text{si } k = 0. \end{cases}}$$

3. On a $A = 4J - 3I_3$. De plus J et I_3 COMMUTENT. Donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n = (4J - 3I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3I_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k \\ &= (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J && \text{par ce qui précède et car } n \geqslant 1 \\ &= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - (-3)^n \right) J \\ &= (-3)^n I_3 + ((4-3)^n - (-3)^n) J \\ &= (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J \end{aligned}$$

   On note que cette formule reste encore vraie si $n = 0$. Conclusion,

   $(\bigstar)$ $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J.}$$

4. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a directement

$$A^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J = (-3)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - (-3)^n) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}.}$$

   On contrôle son résultat pour $n = 0$ ou $n = 1$.

5. Si $n = -1$, posons

$$B = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J = -\frac{1}{3} I_3 + \left(1 + \frac{1}{3}\right) J = \frac{4}{3} J - \frac{1}{3} I_3.$$

On observe que

$$\begin{aligned}
AB &= (4J - 3I_3)\left(\frac{4}{3}J - \frac{1}{3}I_3\right) \\
&= \frac{16}{3}J^2 - \frac{4}{3}J - 4J + I_3 \\
&= \frac{16}{3}J - \frac{16}{3}J + I_3 && \text{d'après la question 1} \\
&= I_3.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que A est inversible. De plus,

$$A^{-1} = B = \frac{4}{3}J - \frac{1}{3}I_3 = (-3)^{-1}I_3 + \left(1 - (-3)^{-1}\right)J.$$

Conclusion,

$$\boxed{(\bigstar) \text{ reste valable pour } n = -1.}$$

6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Méthode 1. Posons

$$B_p = (-3)^{-p}I_3 + \left(1 - (-3)^{-p}\right)J = \frac{1}{(-3)^p}I_3 + \left(1 - \frac{1}{(-3)^p}\right)J.$$

Alors, par la question 3. on a

$$\begin{aligned}
A^pB_p &= ((-3)^pI_3 + (1 - (-3)^p)J)\left(\frac{1}{(-3)^p}I_3 + \left(1 - \frac{1}{(-3)^p}\right)J\right) \\
&= I_3 + ((-3)^p - 1)J + \left(\frac{1}{(-3)^p} - 1\right)J + \left(1 - \frac{1}{(-3)^p} - (-3)^p + 1\right)J^2 \\
&= I_3 + \left((-3)^p + \frac{1}{(-3)^p} - 2\right)J + \left(2 - \frac{1}{(-3)^p} - (-3)^p\right)J^2 && \text{d'après la question 1, } J^2 = J \\
&= I_3.
\end{aligned}$$

Donc A^p est inversible et $A^{-p} = B_p = \frac{1}{(-3)^p}I_3 + \left(1 - \frac{1}{(-3)^p}\right)J$. Donc $(\bigstar)$ est encore vrai pour tout $n = -p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Conclusion,

$$\boxed{(\bigstar) \text{ reste valable pour tout } n \in \mathbb{Z}.}$$

Méthode 2. D'après la question précédente et la formule du binôme de Newton, applicable car I_3 et J COMMUTENT, on a

$$\begin{aligned}
A^{-p} &= \left(A^{-1}\right)^p \\
&= \left(\frac{4}{3}J - \frac{1}{3}I_3\right)^p \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{4}{3}J\right)^k \left(-\frac{1}{3}I_3\right)^{p-k} \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^p I_3 + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \frac{4^k (-1)^{p-k}}{3^p} J && \text{d'après la question 2} \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^p I_3 + \frac{(4-1)^p - (-1)^p}{3^p} J \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^p I_3 + \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^p\right) J \\
&= (-3)^{-p} I_3 + \left(1 - (-3)^{-p}\right) J.
\end{aligned}$$

Ainsi $(\bigstar)$ est encore vrai pour tout $n = -p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Conclusion,

$$\boxed{(\bigstar) \text{ reste valable pour tout } n \in \mathbb{Z}.}$$

Partie 2 : Euclide reprend l'avantage en divisant l'équipe adverse

7. On a les égalités entre matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A^2+2A &= \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 & 0 & 16 \\ -8 & 1 & -8 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & 0 & -16 \\ 8 & 2 & 8 \\ 8 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{A^2+2A=3I_3}$. En posant $\boxed{P(X)=X^2+2X-3}$, on observe bien que $P(X)$ est $\boxed{\text{un polynôme annulateur de } A}$: $P(A)=0_3$.

8. Par la question précédente, $A(A+2I_3)=3I_3$ i.e. $A\left[\frac{1}{3}(A+2I_3)\right]=I_3$. Donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2I_3)=P_1(A), \qquad \text{avec} \qquad P_1(X)=\frac{1}{3}(X+2).}$$

9. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par la division euclidienne pour les polynômes, il existe Q et R deux polynômes tels que

$$X^n=Q(X)P(X)+R(X),$$

avec R un polynôme de degré au plus 1 : il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $R(X)=aX+b$:

$$X^n=Q(X)P(X)+aX+b.$$

On note que 1 et -3 sont les deux racines de P (faire un discriminant si besoin) : $P(1)=P(-3)=0$. Donc en évaluant l'égalité précédente en 1 et en -3, on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1^n=Q(1)\times 0+a+b \\ (-3)^n=Q(-3)\times 0-3a+b \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 1=a+b \\ (-3)^n=-3a+b \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} b=1-a \\ (-3)^n=-3a+1-a=1-4a \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} b=\frac{3+(-3)^n}{4} \\ a=\frac{1-(-3)^n}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est

$$\boxed{R(X)=\frac{1-(-3)^n}{4}X+\frac{3+(-3)^n}{4}.}$$

10. D'après les questions précédentes, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n=Q(A)\underbrace{P(A)}_{=0_3}+R(A) &= \frac{1-(-3)^n}{4}A+\frac{3+(-3)^n}{4}I_3 \\ &= \frac{1-(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}+\frac{3+(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -1+2\,(-3)^n & 0 & -2+2\,(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix}}.$$

On retrouve bien le résultat de la question 4.

Partie 3 : Gauss se pose en pivot du match

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{S}_\lambda)$ l'équation suivante d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_\lambda) \ : \ (\lambda\, I_3 - A)\, X = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On note $\mathscr{S}_\lambda$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}_\alpha)$.

11. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_\lambda) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda+7 & 0 & 8 \\ -4 & \lambda-1 & -4 \\ -4 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} (\lambda+7)\,x + 8z \\ -4x + (\lambda-1)\,y - 4z \\ -4x + (\lambda-5)\,z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\lambda+7)\,x + 8z = 0 \\ -4x + (\lambda-1)\,y - 4z = 0 \\ -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On applique alors naturellement le pivot de Gauss en gardant en tête que x, y et z sont nos inconnues tandis que λ est un paramètre fixé. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_\lambda) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ -4x + (\lambda-1)\,y - 4z = 0 \\ (\lambda+7)\,x + 8z = 0 \end{cases} && L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,y + (-4-\lambda+5)\,z = 0 \\ \left(8 + \frac{(\lambda+7)(\lambda-5)}{4}\right)\,z = 0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{\lambda+7}{4} L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,y + (1-\lambda)\,z = 0 \\ \frac{32+\lambda^2+2\,\lambda-35}{4} z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,y + (1-\lambda)\,z = 0 \\ \left(\lambda^2+2\,\lambda-3\right)\,z = 0 \end{cases} && L_3 \leftarrow 4L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,y + (1-\lambda)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,(\lambda+3)\,z = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Premier cas, supposons $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$. Dans ce cas, on a

$$(\mathcal{S}_\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda - 5)\, z = 0 \\ (\lambda - 1)\, y + (1 - \lambda)\, z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+3)} L_3 \quad \text{car } (\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x = 0 \\ (\lambda - 1)\, y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y = z = 0 \qquad \text{car } \lambda - 1 \neq 0.$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^3}\}\,.$$

Deuxième cas, $\lambda = 1$. Dans ce cas,

$$(\mathcal{S}_1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x - 4z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z = -x.$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ (x, y, -x) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Troisième cas, $\lambda = -3$. Dans ce cas,

$$(\mathcal{S}_{-3}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x - 8z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}.$$

Dans ce cas, on obtient,

$$\mathscr{S}_{-3} = \left\{ (-2z, z, z) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_\lambda = \begin{cases} \{0_{\mathbb{R}^3}\} & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\} \\ \left\{ (x, y, -x) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} & \text{si } \lambda = 1 \\ \left\{ (-2z, z, z) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } \lambda = -3 \end{cases}.}$$

12. Par la question précédente, on a $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 1$. Donc on a d'une part, $\lambda_1 + 2\,\lambda_2 = -3 + 2 \times 1 = -1$. D'autre part, $\mathrm{Tr}\,(A) = -7 + 1 + 5 = -1$. Conclusion, on a bien,

$$\boxed{\lambda_1 + 2\,\lambda_2 = \mathrm{Tr}\,(A)\,.}$$

On dit que λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres de A. Puisque $\mathscr{S}_1$ est un plan, donc de dimension 2 et $\mathscr{S}_{-3}$ une droite, de dimension 1, ce résultat sur la somme pondérée par les dimensions valant la trace de la matrice est un résultat plus général que vous verrez en seconde année.

13. On pose $e_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. On a les égalités entre vecteurs suivants :

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3e_1.$$

Donc $(3I_3 - A)\, e_1 = 0$ i.e. $e_1 \in \mathscr{S}_{-3}$. De même,

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2 \qquad \text{et} \qquad Ae_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e_3$$

Donc $e_2 \in \mathscr{S}_1$ et $e_3 \in \mathscr{S}_1$. Conclusion,

$$\boxed{Ae_1 = -3e_1,\ Ae_2 = e_2,\ Ae_3 = e_3 \qquad \text{i.e.} \qquad e_1 \in \mathscr{S}_{-3},\ (e_2, e_3) \in \mathscr{S}_1^2.}$$

Partie 4 : Un but en diagonale conclut la rencontre

On considère la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. On admet dans cette question que P est inversible. On sait d'après le cours que $\mathrm{Tr}\,(UV) = \mathrm{Tr}\,(VU)$ *(mais n'est pas égal à $Tr\,(U)\; Tr\,(V)$ en général).* Dès lors, en prenant $U = P^{-1}$ et $V = AP$, on obtient

$$\mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{Tr}\left(APP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\,(AI_3) = \mathrm{Tr}\,(A)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{Tr}\,(A)\,.}$$

15. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

N'oubliez pas de vérifier votre résultat.

On a donc montré que $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$ de plus, on a

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.}$$

16. On a

$$P^{-1}AP = P^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion, on obtient

$$\boxed{D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

On retrouve les valeurs propres λ_1 et λ_2...

De plus,

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(D) = -3 + 1 + 1 = -1 = \mathrm{Tr}\,(A)\,,}$$

ce qui est bien cohérent avec la question 14.

17. En multipliant à droite par P^{-1} et à gauche par P, on sait alors également que $A = PDP^{-1}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ». Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$, on a $PD^nP^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3 = A^0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^nA &= PD^nP^{-1}A && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}.}$$

18. On a $A = PDP^{-1}$. Or D est une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux non nuls donc D est inversible et

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc A est le produit de trois matrices inversibles. Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

Conclusion, $\boxed{\text{le résultat est encore vrai pour } n = -1}$.

19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-3)^n & 0 & -(-3)^n \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On retrouve à nouveau le résultat précédent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}.}$$

Exercice III - Analyse Asymptotique

1. Soit $f : x \mapsto \frac{e^{-\cos(x)} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, on pose $h = x - \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \frac{e^{-\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)} - 1}{h} = \frac{e^{\sin(h)} - 1}{h}.$$

Or $\sin(h) \underset{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}}{=} h - \frac{h^3}{6} + o\left(h^4\right)$. De plus, $e^u \underset{u \to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o\left(u^4\right)$. Posons $u(h) \underset{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}}{=} h - \frac{h^3}{6} + o\left(h^4\right)$. Alors,

- $u(h) \underset{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}}{\longrightarrow} 0$

- De plus,

$$\begin{aligned}
u(h)^2 &\underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} \left(h-\frac{h^3}{6}+o\left(h^4\right)\right)\left(h-\frac{h^3}{6}+o\left(h^4\right)\right)\\
&\underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} h^2-\frac{h^4}{6}+o\left(h^4\right)-\frac{h^4}{6}+o\left(h^4\right)+o\left(h^4\right)\\
&\underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} h^2-\frac{h^4}{3}+o\left(h^4\right).
\end{aligned}$$

- Puis,

$$\begin{aligned}
u(h)^3 &\underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} \left(h-\frac{h^3}{6}+o\left(h^4\right)\right)\left(h^2-\frac{h^4}{3}+o\left(h^4\right)\right)\\
&\underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} h^3+o\left(h^4\right).
\end{aligned}$$

- Puisque $u(h) \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{\sim} h$, alors $u(h)^4 \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{\sim} h^4$ i.e. $u(h)^4 \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} h^4+o\left(h^4\right)$.
- Enfin, $o\left(u(h)^4\right) \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} o\left(h^4\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{u(h)} &\underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} 1+h-\frac{h^3}{6}+o\left(h^4\right)+\frac{1}{2}\left(h^2-\frac{h^4}{3}+o\left(h^4\right)\right)+\frac{h^3}{6}+o\left(h^4\right)+\frac{h^4}{24}+o\left(h^4\right)+o\left(h^4\right)\\
&\underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} 1+h+\frac{h^2}{2}-\frac{3h^4}{24}+o\left(h^4\right)\\
&\underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} 1+h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^4}{8}+o\left(h^4\right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} \frac{\mathrm{e}^{u(h)}-1}{h} \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} \frac{1+h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^4}{8}+o\left(h^4\right).-1}{h} \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} 1+\frac{h}{2}-\frac{h^3}{8}+o\left(h^3\right).$$

Autrement dit

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x\neq \frac{\pi}{2}}}{=} 1+\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{8}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right).}$$

(a) En particulier, on a $f(x) \underset{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x\neq \frac{\pi}{2}}}{\sim} 1$. Autrement dit,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x\neq \frac{\pi}{2}}} f(x)=1.}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ peut être prolongée par continuité en } \frac{\pi}{2} \text{ par } f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.}$$

(b) Puisque le fonction f admet un développement à l'ordre 1 en $\frac{\pi}{2}$ donné par

$$f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{=} 1+\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}+o\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

On en déduit directement que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable en } \frac{\pi}{2} \text{ et } f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}.}$$

(c) Toujours à l'aide du développement limité, on en déduit que la courbe représentative de f admet une tangente en $\frac{\pi}{2}$ d'équation

$$\boxed{y=1+\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}.}$$

De plus, on a

$$f(x)-\left(1+\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{=} -\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{8}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right).$$

Et donc

$$\boxed{f(x)-\left(1+\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{8}.}$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré et $-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{8}<0$ en $\frac{\pi}{2}^+$ et au contraire $-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{8}>0$ en $\frac{\pi}{2}^-$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La courbe représentation de } f \text{ est en-dessous de sa tangente en } \frac{\pi}{2}^+ \text{ et au-dessus en } \frac{\pi}{2}^-.}$$

2. On sait que $e^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)$. Posons $u(x)=\frac{1}{x}$. Alors, $u(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Donc

$$e^{u(x)} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

De même, $\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+u^2+o\left(u^2\right)$. Donc, toujours avec la notation $u(x)=\frac{1}{x}$, on a

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
g(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x^2\tfrac{1}{x}\left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}+o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{2x^2}+o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x[1 \quad +\tfrac{1}{x} \quad +\tfrac{1}{2x^2} \quad +o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\\
&\qquad\qquad +\tfrac{1}{x} \quad +\tfrac{1}{x^2} \quad +o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad +\tfrac{1}{x^2} \quad +o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)]\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left[1+\tfrac{2}{x}+\tfrac{5}{2x^2}+o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right]\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x+2+\tfrac{5}{2x}+o\left(\tfrac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } g \text{ admet une asymptote oblique en } +\infty \text{ d'équation } y=x+2.}$$

De plus,

$$g(x) - (x+2) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) - (x+2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{5}{2x} > 0.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } g \text{ est au-dessus de son asymptote } y = x+2 \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

Problème IV - Analyse Asymptotique

1. La fonction sh est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc par la théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{sh définit une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.}$$

On note $\operatorname{argsh} = \mathrm{sh}^{-1}$ sa réciproque. L'objectif est de montrer l'existence d'un développement limité de argsh à l'ordre 5 en 0 et de le déterminer de différentes façons. Les parties sont indépendantes et, sauf mention contraire, on ne pourra pas utiliser les résultats de l'une pour répondre à une autre.

Partie 1 : Faisons connaissance

2. Toujours par le théorème de la bijection, on sait que

$$\boxed{\text{argsh est continue sur } \mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$$

et son tableau de variation est donné par

x	$-\infty$	$+\infty$
argsh	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. Puisque argsh est continue sur $\mathbb{R}$ elle est notamment continue en 0. Par conséquent, argsh admet un développement limité d'ordre 0 en 0 donné par

$$\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to0}{=} \operatorname{argsh}(0) + o(1).$$

Or on a $\mathrm{sh}(0) = 0$ i.e. 0 a pour unique antécédent 0 lui-même et donc $\operatorname{argsh}(0) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to0}{=} o(1).}$$

Partie 2 : Un mariage avec sh réussi

On suppose dans cette partie que argsh admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, noté

$$\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o\left(x^5\right).$$

4. On sait que la fonction sh est impaire. Donc par symétrie par rapport à la droite $y = x$, on en déduit que la fonction argsh est aussi impaire. Par conséquent, son développement limité **en** 0 n'admet que des puissances impaires i.e.

$$\boxed{a_0 = a_2 = a_4 = 0.}$$

5. Au voisinage de 0, on a

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x$, donc

$$\operatorname{argsh}\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).$$

Posons $u(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$. Alors, on a

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$,
- De plus,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 + \tfrac{x^4}{6} + o\left(x^5\right) \\ &\qquad + \tfrac{x^4}{6} + o\left(x^5\right) \\ &\qquad + o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 + \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- De la même façon,

$$\begin{aligned} u(x)^3 = u(x)u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 + \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^3 + \tfrac{x^5}{3} + o\left(x^5\right) \\ &\qquad + \tfrac{x^5}{6} + o\left(x^5\right) \\ &\qquad + o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^3 + \tfrac{x^5}{2} + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- Mais encore,

$$\begin{aligned} u(x)^4 = u(x)^2u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^4 + o\left(x^5\right) + o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^4 + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- Puis comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^5$ i.e. $u(x) \underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right)$.
- Enfin, $o\left(u(x)^5\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right)$.

Or $\operatorname{argsh}(u) \underset{u\to 0}{=} a_1u + a_3u^3 + a_5u^5 + o\left(u^5\right)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh}(\mathrm{sh}(x)) = \operatorname{argsh}(u(x)) &\underset{x\to 0}{=} \operatorname{argsh}\left(x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_1[x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)] \\ &\qquad + a_3[x^3 + \tfrac{x^5}{2} + o\left(x^5\right).] \\ &\qquad + a_5[x^5 + o\left(x^5\right)] \\ &\qquad + o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_1x + \tfrac{a_1+6a_3}{6}x^3 + \tfrac{a_1+60a_3+120a_5}{120}x^5 + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

Or nous avons aussi montré que $\operatorname{argsh}(\operatorname{sh}(x)) = x \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^5\right)$. Donc par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \frac{a_1+6a_3}{6} = 0 \\ \frac{a_1+60a_3+120a_5}{120} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{1}{6}a_1 = -\frac{1}{6} \\ a_5 = -\frac{1}{120}\left(a_1+60a_3\right) = -\frac{1}{120}(1-10) = \frac{3}{40}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right).}$$

Partie 3 : Parce que ch est jaloux

On suppose toujours que argsh admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 donné par

$$\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to 0}{=} a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o\left(x^5\right).$$

6. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on sait que $\operatorname{ch}^2(u) = 1 + \operatorname{sh}^2(u)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2(\operatorname{argsh}(x)) = 1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh}(x)) = 1 + x^2 \qquad \text{car } \operatorname{argsh} = \operatorname{sh}^{-1}.$$

Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(u) \geqslant 1 > 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = +\sqrt{1+x^2}.}$$

7. Puisque $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que

$$\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^4 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}x^6 + o\left(x^6\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} + o\left(x^6\right).}$$

8. On a

$$\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) \underset{x\to 0}{=} \operatorname{ch}\left(x + a_3x^3 + a_5x^5 + o\left(x^5\right)\right).$$

Or $\operatorname{ch}(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^6}{720} + o\left(u^6\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x + a_3x^3 + a_5x^5 + o\left(x^5\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x + a_3x^3 + a_5x^5 + o\left(x^5\right)\right)\left(x + a_3x^3 + a_5x^5 + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll} x^2 & +a_3x^4 & +a_5x^6 & +o\left(x^6\right) \\ & +a_3x^4 & +a_3^2x^6 & +o\left(x^6\right) \\ & & +a_5x^6 & +o\left(x^6\right) \\ & & & +o\left(x^6\right) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 + 2a_3x^4 + \left(2a_5 + a_3^2\right)x^6 + o\left(x^6\right). \end{aligned}$$

- De même,

$$\begin{aligned}
u(x)^4 &= u(x)^2 u(x)^2 \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x^2+2a_3x^4+\left(2a_5+a_3^2\right)x^6+o\left(x^6\right)\right)\left(x^2+2a_3x^4+\left(2a_5+a_3^2\right)x^6+o\left(x^6\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^4+2a_3x^6+2a_3x^6+o\left(x^6\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^4+4a_3x^6+o\left(x^6\right).
\end{aligned}$$

- Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x)^6 \underset{x\to 0}{\sim} x^6$ i.e. $u(x)^6 \underset{x\to 0}{=} x^6+o\left(x^6\right)$.
- Enfin, on a $o\left(u(x)^6\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^6\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\left(\mathrm{argsh}(x)\right) &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{ch}\left(u(x)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\tfrac{1}{2}[x^2 \quad +2a_3x^4 \quad +\left(2a_5+a_3^2\right)x^6 \quad +o\left(x^6\right)] \\
&\qquad\qquad +\tfrac{1}{24}[x^4 \quad +4a_3x^6 \quad +o\left(x^6\right)] \\
&\qquad\qquad\qquad +\tfrac{1}{720}[x^6 \quad +o\left(x^6\right)] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^6\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\tfrac{x^2}{2}+\left(a_3+\tfrac{1}{24}\right)x^4+\left(a_5+\tfrac{a_3^2}{2}+\tfrac{a_3}{6}+\tfrac{1}{720}\right)x^6+o\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

Or on a vu que

$$\mathrm{ch}\left(\mathrm{argsh}(x)\right)=\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}+o\left(x^6\right).$$

Donc par unicité du développement limité, on obtient que

$$\begin{cases} 1=1 \\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ a_3+\frac{1}{24}=-\frac{1}{8} \\ a_5+\frac{a_3^2}{2}+\frac{a_3}{6}+\frac{1}{720}=\frac{1}{16} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a_3=\frac{-3-1}{24}=-\frac{1}{6} \\ a_5=\frac{1}{16}-\frac{a_3^2}{2}-\frac{a_3}{6}-\frac{1}{720}. \end{cases}$$

On obtient alors,

$$a_5=\frac{45-1}{16\times 45}-\frac{1}{36\times 2}+\frac{1}{36}=\frac{11}{4\times 45}+\frac{1}{2\times 36}=\frac{22+5}{8\times 5\times 9}=\frac{27}{8\times 5\times 9}=\frac{3}{40}.$$

Ainsi, on retrouve le résultat :

$$\boxed{\mathrm{argsh}(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o\left(x^5\right).}$$

Partie 4 : En laissant couler (ou dériver quoi) les choses s'arrangent

9. La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)>0$. Donc la dérivée de sh ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par le théorème de la dérivabilité de la réciproque, on en déduit que $\boxed{\text{argsh est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{argsh}'(x)=\frac{1}{\mathrm{sh}'\left(\mathrm{argsh}(x)\right)}=\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\mathrm{argsh}(x)\right)}.$$

Donc par la question 6. on obtient,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{argsh}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. On a déjà vu à la question précédente que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est définie et même de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ (car $n \geqslant 1$) sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc que argsh est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Notamment de classe $\mathscr{C}^1$ et donc de classe $\mathscr{C}^0$ (continue). Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, argsh est de classe $\mathscr{C}^n$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ argsh admet un développement limité à l'ordre } n \text{ en } 0.}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2}x^4 + \cdots + \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-(2n-1))}{n!}x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + (-1)^n\frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{n!}x^{2n} + o\left(x^{2n}\right).\end{aligned}$$

Or argsh est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème d'intégration des développement limités, on obtient que

$$\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to 0}{=} \operatorname{argsh}(0) + x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + (-1)^n\frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{n!\,(2n+1)}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Or $\operatorname{argsh}(0) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + (-1)^n\frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{n!\,(2n+1)}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right).}$$

En particulier, si $n = 2$, on retrouve une fois encore

$$\boxed{\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right).}$$

Partie 5 : Finalement ce n'était qu'un logarithme qui ne s'assumait pas

12. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a alors les équivalences suivantes :

$$y = \operatorname{sh}(x) \quad\Leftrightarrow\quad y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 2y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}.$$

Posons $X = \mathrm{e}^x$. On a alors,

$$\begin{aligned}y = \operatorname{sh}(x) \quad\Leftrightarrow\quad 2y = X - \frac{1}{X} \quad&\Leftrightarrow\quad 2yX = X^2 - 1 \qquad \text{car } X = \mathrm{e}^x \neq 0\\ &\Leftrightarrow\quad X^2 - 2yX - 1 = 0.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 4y^2 + 4 = 4\left(y^2+1\right) > 0$. Par conséquent,

$$y = \operatorname{sh}(x) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} X = \frac{2y+\sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}\\ \text{OU}\\ X = \frac{2y-\sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}.\end{cases}$$

Or $1+y^2 > y^2$, donc $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y| \geqslant y$. Ainsi, $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ mais $y + \sqrt{1+y^2} > y + |y| \geqslant 0$. Or $X = \mathrm{e}^x > 0$. Par conséquent,

$$y = \operatorname{sh}(x) \quad\Leftrightarrow\quad X = y + \sqrt{y^2+1} \quad\Leftrightarrow\quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{y = \operatorname{sh}(x) \quad\Leftrightarrow\quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).}$$

13. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$, puisque $\operatorname{argsh}^{-1} = \operatorname{sh}$, on a

$$x = \operatorname{argsh}(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{sh}(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).}$$

Or $\sqrt{1+y^2} \underset{y\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}y^4 + o\left(y^5\right) \underset{y\to 0}{=} 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} + o\left(y^5\right)$. Alors,

$$\operatorname{argsh}(y) \underset{y\to 0}{=} \ln\left(1 + y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} + o\left(y^5\right)\right).$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o\left(u^5\right)$. Posons $u(y) \underset{y\to 0}{=} y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} + o\left(y^5\right)$. On a alors

- $u(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned}
u(y)^2 &\underset{y\to 0}{=} \left(y + \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^4}{8} + o\left(y^5\right)\right)\left(y + \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^4}{8} + o\left(y^5\right)\right) \\
&\underset{y\to 0}{=} y^2 + \tfrac{y^3}{2} - \tfrac{y^5}{8} + o\left(y^5\right) \\
&\qquad + \tfrac{y^3}{2} + \tfrac{y^4}{4} + o\left(y^5\right) \\
&\qquad - \tfrac{y^5}{8} + o\left(y^5\right) \\
&\qquad + o\left(y^5\right) \\
&\underset{y\to 0}{=} y^2 + y^3 + \tfrac{y^4}{4} - \tfrac{y^5}{4} + o\left(y^5\right)
\end{aligned}$$

- Puis,

$$\begin{aligned}
u(y)^3 &\underset{y\to 0}{=} \left(y + \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^4}{8} + o\left(y^5\right)\right)\left(y^2 + y^3 + \tfrac{y^4}{4} - \tfrac{y^5}{4} + o\left(y^5\right)\right) \\
&\underset{y\to 0}{=} y^3 + y^4 + \tfrac{y^5}{4} + o\left(y^5\right) \\
&\qquad + \tfrac{y^4}{2} + \tfrac{y^5}{2} + o\left(y^5\right) \\
&\qquad + o\left(y^5\right) \\
&\underset{y\to 0}{=} y^3 + \tfrac{3y^4}{2} + \tfrac{3y^5}{4} + o\left(y^5\right).
\end{aligned}$$

- Mais encore,

$$\begin{aligned}
u(y)^4 &\underset{y\to 0}{=} \left(y + \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^4}{8} + o\left(y^5\right)\right)\left(y^3 + \tfrac{3y^4}{2} + \tfrac{3y^5}{4} + o\left(y^5\right)\right) \\
&\underset{y\to 0}{=} y^4 + \tfrac{3y^5}{2} + o\left(y^5\right) \\
&\qquad + \tfrac{y^5}{2} + o\left(y^5\right) \\
&\qquad + o\left(y^5\right) \\
&\underset{y\to 0}{=} y^4 + 2y^5 + o\left(y^5\right).
\end{aligned}$$

- Puisque $u(y) \underset{y\to 0}{\sim} y$, on en déduit que $u(y)^5 \underset{y\to 0}{\sim} y^5$ et donc $u(y) \underset{y\to 0}{=} y^5 + o\left(y^5\right)$.
- Finalement, on a $o\left(u(y)^5\right) \underset{y\to 0}{=} o\left(y^5\right)$.

Ainsi,

$$\begin{array}{rllllll}
\operatorname{argsh}(y) \underset{y\to0}{=} & \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) \\
\underset{y\to0}{=} & y & +\frac{y^2}{2} & & -\frac{y^4}{8} & & +o\left(y^5\right) \\
& & -\frac{1}{2}[y^2 & +y^3 & +\frac{y^4}{4} & -\frac{y^5}{4} & +o\left(y^5\right)] \\
& & & +\frac{1}{3}[y^3 & +\frac{3y^4}{2} & +\frac{3y^5}{4} & +o\left(y^5\right)] \\
& & & & -\frac{1}{4}[y^4 & +2y^5 & +o\left(y^5\right)] \\
& & & & & +\frac{1}{5}[y^5 & +o\left(y^5\right)] \\
& & & & & & +o\left(y^5\right) \\
\underset{y\to0}{=} & y-\frac{y^3}{6}+\frac{y^5}{8}+\frac{y^5}{4}-\frac{y^5}{2}+\frac{y^5}{5}+o\left(y^5\right) \\
\underset{y\to0}{=} & y-\frac{y^3}{6}+\frac{(5+10-20+8)y^5}{40}+o\left(y^5\right) \ .
\end{array}$$

Conclusion, on obtient une fois encore,

$$\boxed{\operatorname{argsh}(y) \underset{y\to0}{=} y-\frac{y^3}{6}+\frac{3y^5}{40}+o\left(y^5\right).}$$