Correction du Devoir Maison 7 Continuité-dérivabilité, suites et polynômes

Du jeudi 13 février

Problème I - Continuité-dérivabilité

Partie 1 : Fifi à la classe

On définit

$$\varphi : \begin{array}{ccl}]-\pi;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\arctan(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrons que φ est continue sur $]-\pi;\pi[$. Les fonctions cosinus, sinus et arctan sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\pi;\pi[$. De plus, pour tout $x \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$, $\sin(x) \neq 0$. Donc par quotient et produit, φ est continue sur $]-\pi;0[\cup]0;\pi[$. Etudions la limite en 0. On sait que

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x \quad \text{et} \quad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1.$$

Donc par quotient,

$$\varphi(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{1}{x}x = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi(x) = 1 = \varphi(0) \qquad \text{par définition.}$$

Donc φ est continue en 0. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur }]-\pi;\pi[}$$

2. On note que $]-\pi;\pi[$ est centré en 0. De plus, pour tout $x \in]-\pi;\pi[$, si $x \neq 0$, $-x$ aussi et donc

$$\varphi(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}\arctan(-x) = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)}(-\arctan(x)) = \varphi(x),$$

par imparité de sin et arctan et parité de cos. Si $x = 0$, $\varphi(-x) = \varphi(0) = \varphi(x)$. Donc dans tous les cas,

$$\forall x \in]-\pi;\pi[, \qquad \varphi(-x) = \varphi(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est paire.}}$$

3. Les fonctions cos, sin et arctan sont dérivables sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$ et sin ne s'annule pas sur cet ensemble donc φ est dérivable sur cet ensemble et

$$\begin{aligned}\forall x \in]-\pi;\pi[\setminus\{0\}, \qquad \varphi'(x) &= \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' \arctan(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \arctan'(x)\\ &= \frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \arctan(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \frac{1}{1+x^2}\\ &= -\frac{1}{\sin^2(x)} \arctan(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \frac{1}{1+x^2}\\ &= \frac{1}{\sin^2(x)} \left(-\arctan(x) + \cos(x)\sin(x)\frac{1}{1+x^2}\right) \qquad \text{car } \sin(x)\neq 0\\ &= \frac{1}{\sin^2(x)} \left(\frac{\sin(2x)}{2}\frac{1}{1+x^2} - \arctan(x)\right).\end{aligned}$$

Conclusion, on observe bien que

$$\boxed{\forall x \in]-\pi;\pi[\setminus\{0\}, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}\left(\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)} - \arctan(x)\right).}$$

4. On sait que $\sin(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Donc en posant $u = 2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\sin(2x) \underset{x\to 0}{=} 2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^3).$$

Donc

$$\frac{\sin(2x)}{2} \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

D'autre part, $\frac{1}{1+u} \underset{x\to 0}{=} 1 - u + o(u)$. Donc en prenant $u = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a également

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^2).$$

Par produit,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{2x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(1 - x^2 + o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x \quad -x^3 \quad +o(x^3)\\ &\qquad\quad -\tfrac{2x^3}{3} \quad +o(x^3)\\ &\qquad\qquad\qquad +o(x^3)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{5x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

Enfin,

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc par différence,

$$\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)} - \arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{5x^3}{3} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{4x^3}{3} + o(x^3).$$

De là, on en déduit que

$$\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)} - \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{4x^3}{3}.$$

Inutile de faire le développement limité de $\frac{1}{\sin^2(x)}$. Nous avons directement, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc par passage à la puissance -2,

$$\frac{1}{\sin^2(x)} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Finalement, par produit,

$$\boxed{\varphi'(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{4x^3}{3}\right) = -\frac{4x}{3}.}$$

5. D'après ce qui précède, on sait que φ est dérivable sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$ et par la question précédente,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} -\frac{4x}{3} = 0.$$

De plus, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$ comme produit et quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi,

- φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$.
- φ est continue sur $]-\pi;\pi[$ (par la question 2.).
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi'(x)$ existe et vaut 0.

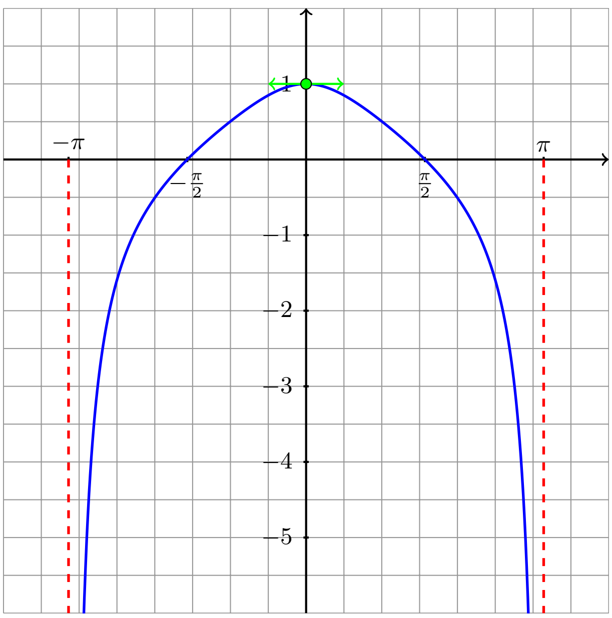
Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que φ est $\mathscr{C}^1$ en 0 et $\varphi'(0) = 0$. Or φ est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-\pi;\pi[.}$$

De plus on a $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$. Ainsi, φ admet une tangente horizontale en 0 dont l'équation est donnée par

$$\boxed{y = 1.}$$

6. On obtient le graphe suivant



Partie 2 : Pour partir loin en un temps fini, il vaut mieux courir vite

Soit f une fonction dérivable sur $]-\pi;\pi[$ telle que $\lim\limits_{x\to-\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi} f(x) = -\infty$ et $f(0)=1$.

7. On sait que $\lim\limits_{x\to-\pi} f(x) = -\infty$ i.e.

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists\eta>0,\ \forall x\in\left]-\pi;-\pi+\eta\right[, \qquad f(x)\leqslant A.$$

En particulier pour $A=0$, on obtient qu'il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in]-\pi;-\pi+\eta[$, $f(x)\leqslant 0$. Posons $a=\min(-\pi+\eta,-1)$, alors $a\in]-\pi;0[$ et pour tout $x\in]-\pi;-\pi+\eta[$, on a $x\in]-\pi;a[$ et donc $f(x)\leqslant 0$.

De même, $\lim_{x\to\pi} f(x)=-\infty$ donc pour $A=0$, il existe $b\in]0;\pi[$ tel que pour tout $x\in]0;\pi[$, $f(x)\leqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\exists\,(a,b)\in\left]-\pi;0\right[\times\left]0;\pi\right[,\ \forall x\in\left]-\pi;a\right[\cup\left]b;\pi\right[, \qquad f(x)\leqslant 0.}$$

8. Montrons que $[0;1]\subset f\left(\left]-\pi;\pi\right[\right)$. Soit $x\in[0;1]$. Par la question précédente, on a $f(a)\leqslant 0$. Donc

$$f(a)\leqslant 0\leqslant x\leqslant 1=f(0).$$

Or la fonction f est dérivable et donc continue sur le segment $[a;0]$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists\alpha\in[a:0], \qquad x=f(\alpha).$$

En particulier,

$$\exists\alpha\in\left]-\pi;\pi\right[, \qquad x=f(\alpha).$$

Par conséquent, $x\in f\left(\left]-\pi;\pi\right[\right)$. Ceci étant vrai pour tout $x\in[0;1]$, on en déduit que

$$\boxed{[0;1]\subset f\left(\left]-\pi;\pi\right[\right).}$$

9. La fonction f est continue sur $]-\pi;\pi[$ donc sur le segment $[a;b]\subset]-\pi;\pi[$. Donc par le théorème des bornes atteintes :

$$\exists x_0\in[a;b],\ \forall x\in[a;b], \qquad f(x_0)\geqslant f(x).$$

En particulier, puisque $0\in[a;b]$, $f(x_0)\geqslant f(0)=1>0$. Or on sait que pour tout $x\in]-\pi;a[\cup]b;\pi[$, $f(x)\leqslant 0$ et donc $f(x)\leqslant f(x_0)$. Ainsi

$$\exists x_0\in[a;b]\subset\left]-\pi;\pi\right[,\ \forall x\in\left]-\pi;\pi\right[, \qquad f(x)\leqslant f(x_0).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un maximum sur }]-\pi;\pi[.}$$

Et celui-ci est atteint sur $[a;b]$.

10. On suppose que f' est bornée sur $[0;\pi[$: il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in[0;\pi[$, $|f'(x)|\leqslant M$.

(a) Soit $(x,y)\in[0;\pi[^2$, $x\neq y$. Alors, puisque la fonction f est dérivable sur $]-\pi;\pi[$, on en déduit que f est continue sur $[x;y]$ (ou $[y;x]$) dérivable sur $]x;y[$ (ou $]y;x[$). Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c\in]x;y[\ \text{(ou }]y;x[), \qquad f(x)-f(y)=f'(c)(x-y).$$

Donc

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\,|x-y|\leqslant M\,|x-y| \qquad \text{car } c\in]x;y[\subset[0;\pi[.$$

L'inégalité étant encore vraie pour $x=y$, on a

$$\forall (x,y)\in[0;\pi[^2, \qquad |f(x)-f(y)|\leqslant M\,|x-y|.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } M\text{-lipschitzienne sur } [0;\pi[.}$$

(b) Soit $x \in [0;\pi[$. Par la question précédente, on a

$$|f(x)-f(0)| = |f(x)-1| \leqslant M\,|x-0| = M\,|x| \leqslant M\pi.$$

Donc

$$\forall x \in [0;\pi[\,, \qquad f(x)-1 \geqslant -M\pi \;\Leftrightarrow\; f(x) \geqslant 1-M\pi.$$

Donc la fonction f est minorée sur $[0;\pi[$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} f(x) = -\infty$ ce qui est contradictoire. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f' \text{ n'est pas bornée.}}$$

Problème II - Suites numériques

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie 1 : Commençons par faire fonctionner la fonction

1. La fonction f est une fonction bien définie et même deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \left(2x-x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x} = -\left(x-1\right)^2\mathrm{e}^{-x}.$$

Puis,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = \left(-2x+2+x^2-2x+1\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(x^2-4x+3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit Δ le discriminant de X^2-4X+3, on a $\Delta = 16-12 = 4$. Donc les racines associées sont $r_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. Ainsi f'' est strictement positive sur $]-\infty\,;1[\cup]3\,;\,,+\infty[$ et strictement négative sur $]1\,;3[$. Donc f' est strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$, strictement décroissante sur $[1\,;3]$ et strictement croissante sur $[3\,;\,,+\infty[$. De plus on a les valeurs suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty, \quad f'(1) = 0, \quad f'(3) = -4\,\mathrm{e}^{-3}, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \text{ (par croissance comparée).}$$

Enfin f' est strictement négative sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad f(0) = 1, \qquad f(1) = 2\,\mathrm{e}^{-1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ (par croissance comparée).}$$

Conclusion, on obtient :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-4\,\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$	0

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$2\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

2. La fonction f est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 < 1.$$

Donc par le théorème de la bijection, $\boxed{\text{il existe un unique réel } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = 1}$. Comme $f(0) = 1$, $\boxed{\text{cette unique solution est atteinte en } x = 0}$.

3. (a) Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc par somme, la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, on a

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty + \infty = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 - \infty = -\infty.$$

Donc, par le théorème de la bijection, $\boxed{\text{il existe un unique réel } \ell \in \mathbb{R}}$ tel que $g(\ell) = 0$ i.e. $\boxed{\text{tel que } f(\ell) = \ell}$.

(b) Avec les notations de la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{4} + 1\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{5\,\mathrm{e}^{-1/2} - 2}{4} \\ &= \frac{5 - 2\sqrt{\mathrm{e}}}{4\sqrt{\mathrm{e}}} > \frac{5 - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{\mathrm{e}}} > 0 \text{ (car } 25 > 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2) \end{aligned}$$

et

$$g(1) = f(1) - 1 = 2\,\mathrm{e}^{-1} - 1 = \frac{2}{\mathrm{e}} - 1 < 0.$$

Donc $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0 = g(\ell) > g(1)$. Donc par la stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\ell \in]1/2\,;\,1[}$.

4. La fonction f' est strictement croissante sur $[1/2\,;\,1]$ et

$$f'(1/2) = -\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 \mathrm{e}^{-1}\,2 = -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-1}\,2 = -\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}} \qquad \text{et} \qquad f'(1) = 0.$$

Donc, pour tout $x \in [1/2\,;\,1]$,

$$-\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}} \leqslant f'(x) \leqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Autrement dit $\sup_{t\in[1/2\,;\,1]} |f'(t)| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}$. Soit $(x, y) \in [1/2\,;\,1]^2$, $x \neq y$. La fonction f est continue sur $[x\,;\,y]$ (ou $[y\,;\,x]$), dérivable sur $]x\,;\,y[$ (ou $]y\,;\,x[$). Donc d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{t\in]x\,;\,y[} |f'(t)|\,|x - y| \leqslant \sup_{t\in[1/2\,;\,1]} |f'(t)|\,|x - y| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\,|x - y|\,,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Ainsi la fonction $\boxed{f \text{ est } \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\text{-lipschitzienne sur } [1/2\,;\,1]}$.

5. On sait que

$$\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Donc

$$f(x) \underset{x\to0}{=} (x^2 + 1)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to0}{=} x^2 + o\left(x^2\right) + 1 - x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to0}{=} 1 - x + \frac{3x^2}{2} + o\left(x^2\right).}$$

Partie 2 : Passons à la suite, cela va sans dire

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \left(x^2+1\right) \mathrm{e}^{-x} - 1 + \frac{1}{n}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x) - 1 + \frac{1}{n}$. Or la fonction f est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc f_n est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -1 + \frac{1}{n} < 0 \qquad \text{car } n \geqslant 2.$$

Donc par le théorème de la bijection (encore ? oui je sais)

$$\boxed{\text{il existe un unique } u_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f_n\left(u_n\right) = 0.}$$

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On a $f_n(0) = \frac{1}{n} > 0 = f_n\left(u_n\right)$. Or on a vu que f_n était strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $u_n > 0$. Ceci étant vrai pour un n quelconque, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad u_n > 0.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par définition, on a $f_n\left(u_n\right) = 0$ i.e.

$$\left(u_n^2+1\right) \mathrm{e}^{-u_n} - 1 + \frac{1}{n} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(u_n^2+1\right) \mathrm{e}^{-u_n} - 1 = -\frac{1}{n}.$$

Alors,

$$f_{n+1}\left(u_n\right) = \left(u_n^2+1\right) \mathrm{e}^{-u_n} - 1 + \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}.$$

Donc

$$f_{n+1}\left(u_n\right) < 0 = f_{n+1}\left(u_{n+1}\right).$$

Donc par la stricte décroissance de la fonction f_{n+1}, on en déduit que

$$u_n > u_{n+1}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 2$, on conclut que la suite $\boxed{\left(u_n\right)_{n \geqslant 2} \text{ est strictement décroissante}}$.

(c) Par les questions précédentes, on sait que la suite $\left(u_n\right)_{n \geqslant 2}$ est décroissante et minorée par 0. Donc par le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\left(u_n\right)_{n \geqslant 2}$ converge. Notons a sa limite (la notation ℓ est déjà réservée par l'énoncé). Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on a $u_n > 0$, on en déduit par passage à la limite que $a \geqslant 0$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$f_n\left(u_n\right) = \left(u_n^2+1\right) \mathrm{e}^{-u_n} - 1 + \frac{1}{n} = 0.$$

Donc par passage à la limite,

$$\left(a^2+1\right) \mathrm{e}^{-a} - 1 + 0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(a) = 1.$$

Donc par la question 2., on en déduit nécessairement que $a = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\left(u_n\right)_{n \geqslant 2} \text{ converge vers } 0.}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$\left(u_n^2+1\right)\mathrm{e}^{-u_n} - 1 + \frac{1}{n} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(u_n^2+1\right)\mathrm{e}^{-u_n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Or $1+u_n^2 \geqslant 1 > 0$, $\mathrm{e}^{-u_n} > 0$ et $1-\frac{1}{n} > 0$ car $n \geqslant 2$. Donc par composition par le logarithme, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad -u_n + \ln\left(1+u_n^2\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).}$$

(b) On sait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi

$$-u_n + \ln\left(1+u_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} -u_n + u_n^2 + o\left(u_n^2\right).$$

Mais comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n^2 = u_n \times u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(u_n\right)$. Par conséquent,

$$-u_n + \ln\left(1+u_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} -u_n + o\left(u_n\right)$$

i.e. $$-u_n + \ln\left(1+u_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$$ car $\forall n \geqslant 2, u_n > 0$.

D'autre part,

$$-u_n + \ln\left(1+u_n^2\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou encore

$$-u_n + \ln\left(1+u_n^2\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

Donc par transitivité de l'équivalence, on en déduit que

$$-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

et par conséquent,

$$\boxed{u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.}$$

(c) Par la question précédente, on a $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or nous avions également établi que

$$-u_n + u_n^2 + o\left(u_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} -u_n + \ln\left(1+u_n^2\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} u_n^2 + o\left(u_n^2\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

9. Il est clair que f définie une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par le théorème de la bijection et donc f^{-1} est une fonction bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus par la question 1. et le tableau de variation, on remarque que pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0 \iff x = 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{-1}(x) \neq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \neq f(1) \qquad \Leftrightarrow \qquad x \neq 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$
   Ainsi, pour tout $x \in J = \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{2\,\mathrm{e}^{-1}\right\}$, on a $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$ et donc d'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, la fonction $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } J}$ et
$$\boxed{\forall x \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.}$$

   (b) La fonction f' est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle et non nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La fonction f^{-1} est dérivable sur J. Donc par composition et quotient, on en déduit que $\left(f^{-1}\right)'$ est dérivable sur J. Donc f^{-1} est deux fois dérivable sur J et notamment $\mathscr{C}^1$ sur J. Or nous avons déjà vu que f' est $\mathscr{C}^1$ et non nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc par composition et quotient et la formule $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ on en déduit mieux : que $\boxed{\left(f^{-1}\right)' \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } J}$.

   (c) Puisque $\left(f^{-1}\right)'$ est $\mathscr{C}^1$, on en déduit que f^{-1} est $\mathscr{C}^2$ sur J et donc notamment en 1. Par conséquent, la fonction $\boxed{f^{-1} \text{ admet un développement limité d'ordre 2 en 1}}$, noté
$$f^{-1}(x) \underset{x \to 1}{=} a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right), \qquad (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3.$$

   (d) Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = f(x) - 1$. Par la question 5., on a
$$u(x) \underset{x \to 0}{=} -x + \frac{3x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$
   Donc
$$u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + u(x) = f(x) \in J$ et
$$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1 + u(x)).$$
   D'après la question précédente,
$$f^{-1}(1+u) \underset{u \to 0}{=} a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + o\left(u^2\right).$$
   Or,
   - $u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
   - On a vu aussi que $u(x) \underset{x \to 0}{=} -x + \frac{3x^2}{2} + o\left(x^2\right)$.
   - Donc $u^2(x) \underset{x \to 0}{=} x^2 + o\left(x^2\right)$.
   - Enfin, $o\left(u^2(x)\right) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$.

   Ainsi
$$\begin{aligned} x = f^{-1}(1 + u(x)) &\underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1\left(-x + \frac{3x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) + a_2\left(x^2 + o\left(x^2\right)\right) + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x \to 0}{=} a_0 - a_1 x + \left(\frac{3a_1}{2} + a_2\right)x^2 + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Donc par unicité du développement limité, on obtient que

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = -1, \qquad a_2 = -\frac{3a_1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Autrement dit,

$$f^{-1}(1+u) \underset{u\to 0}{=} -u + \frac{3u^2}{2} + o\left(u^2\right)$$

ou encore

$$\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to 1}{=} -(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right).}$$

(e) Par définition de f et de $(u_n)_{n\geqslant 2}$, on a pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\left(u_n^2+1\right)\mathrm{e}^{-u_n} - 1 + \frac{1}{n} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(u_n^2+1\right)\mathrm{e}^{-u_n} = 1 - \frac{1}{n}\\ &\Leftrightarrow \quad f\left(u_n\right) = 1 - \frac{1}{n}\\ &\Leftrightarrow \quad u_n = f^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Donc par la question précédente, avec $u = -\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\left(-\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{1}{n}\right)^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 8.c :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Partie 3 : Pour terminer, récurez encore et encore

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = f\left(v_n\right).$$

10. On note que puisque f est bien définie sur $\mathbb{R}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Posons $I = [1/2\,;\,1]$ et montrons que I est stable par f. On sait que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de la bijection :

$$f(I) = [f(1)\,;\,f(1/2)] = \left[\frac{2}{\mathrm{e}}\,;\,\frac{5}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\right].$$

D'une part puisque $\mathrm{e} \leqslant 4$, alors $\frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}$. D'autre part $25 \leqslant 32$ donc $25 \leqslant 16 \times \mathrm{e}$ i.e. $5 \leqslant 4\sqrt{\mathrm{e}}$ ou encore $\frac{5}{4\sqrt{\mathrm{e}}} \leqslant 1$. Ainsi, on a bien

$$f(I) \subset [1/2\,;\,1] = I.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in I$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $v_n \in I$ ».

Initialisation. On a $v_0 = 1 \in 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors $v_n \in I$. Donc $v_{n+1} = f\left(v_n\right) \in F(I)$. Or $f(I) \subset I$. Donc $v_{n+1} \in I$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n \in [1/2\,;\,1]}$.

11. Par la question 4., on a déjà vu que la fonction f est $\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}$-lipschitzienne sur I. Or on sait également que pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in I$ et $\ell \in I$. Donc en prenant $x = v_n$ et $y = \ell$, on trouve que

$$|f(v_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}} |v_n - \ell|.$$

Or $f(v_n) = v_{n+1}$ et ℓ est le point fixe de f donc $f(\ell) = \ell$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |v_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}} |v_n - \ell|.}$$

12. On démontre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|v_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n |v_0 - \ell|.$$

Or $0 < \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}} < 1$. Donc $\left(\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n |v_0 - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par le théorème d'encadrement $|v_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Conclusion, $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell}$.

13. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{v_n - \ell}{\left(\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n}$ et par définition de la domination montrons que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|V_n| = \frac{|v_n - \ell|}{\left(\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n} \leqslant |v_0 - \ell| \qquad \longleftarrow \text{indépendant de } n.$$

Donc la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et par conséquent, $v_n - \ell \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\left(\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n\right)$ ou encore

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + O\left(\left(\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n\right).}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = v_{2n} \qquad \text{et} \qquad b_n = v_{2n+1}.$$

14. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et g une fonction décroissante sur I. Posons $h = g \circ g$. Alors pour tout $(x, y) \in I^2$, on a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} x \leqslant y \quad &\Rightarrow \quad g(x) \geqslant g(y) && \text{car } g \text{ est dércoissante} \\ &\Rightarrow \quad g(g(x)) \leqslant g(g(y)) && \text{car } g \text{ est dércoissante} \\ &\Rightarrow \quad h(x) \leqslant h(y). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{h \text{ est croissante}}$.

15. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$a_{n+1} = v_{2n+2} = f(v_{2n+1}) = f \circ f(v_{2n}).$$

Posons $g = f \circ f$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = g(a_n).$$

Or la fonction f est décroissante donc $g = f \circ f$ est croissante. Donc

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone.}}$$

(b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nécessairement, $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell}$. On a $a_0 = v_0 = 1$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et converge vers $l < 1$ (cf question 3.b). Nécessairement la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} \leqslant a_n.$$

Or la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, les assertions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{rcl} f(a_{n+1}) \geqslant f(a_n) & \Leftrightarrow & f(v_{2n+2}) \geqslant f(v_{2n}) \\ & \Leftrightarrow & v_{2n+3} \geqslant v_{2n+1} \\ & \Leftrightarrow & b_{n+1} \geqslant b_n \end{array}$$

ce qui démontre que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant aussi une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge également vers ℓ. Par différence,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = \ell - \ell = 0.$$

Rappelons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Nous avons donc bien démontré le fait que $\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$.

Partie 4 : Quand Taylor et Cesàro s'en mêlent (facultatif)

On admet dans la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > \ell$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \ln(a_n - \ell).$$

Enfin, on note également

$$\beta = (f \circ f)'(\ell).$$

16. Par la dérivation d'une composée, on a

$$\beta = (f \circ f)'(\ell) = f'(\ell) \times f'(f(\ell))?$$

Or ℓ est un point fixe de f, donc $f(\ell) = \ell$. D'où,

$$\beta = f'(\ell)\, f'(\ell) = f'(\ell)^2.$$

On sait que $\ell \in]1/2\,;1[$ et que f' est strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$. Donc

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) < f'(\ell) < f'(1) = 0.$$

Or $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}$. Donc

$$0 < f'(\ell)^2 < \frac{1}{16\,\mathrm{e}} < 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\beta = f'(\ell)^2 \in]0\,;1[\,.}$$

17. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = g(a_n)$, avec $g = f \circ f$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc par la formule de Taylor,
$$g(x) \underset{x \to \ell}{=} f(\ell) + g'(\ell)(x-\ell) + o((x-\ell)).$$
Or on sait également que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Donc par la caractérisation séquentielle de la limite,
$$g(a_n) \underset{x \to \ell}{=} g(\ell) + g'(\ell)(a_n-\ell) + o((a_n-\ell)).$$
De plus ℓ est un point fixe de f donc $g(\ell) = f \circ f(\ell) = f(\ell) = \ell$. Enfin, $g'(\ell) = (f \circ f)'(\ell) = \beta$ et $g(a_n) = a_{n+1}$. Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \beta(a_n - \ell) + o(a_n - \ell).}$$

18. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > \ell$. Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. De plus par la question précédente, on a
$$w_{n+1} = \ln(a_{n+1} - \ell) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\beta(a_n-\ell) + o(a_n-\ell)) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\beta(a_n-\ell)(1+o(1))).$$
Or $\beta > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n - \ell > 0$ et pour n suffisamment grand, $1 + o(1) > 0$. Donc
$$w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\beta) + \ln(a_n - \ell) + \ln(1+o(1)).$$
Enfin, $\ln(1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Conclusion,
$$\boxed{w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\beta) + w_n + o(1).}$$

19. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega_n = w_{n+1} - w_n$. Alors par la question précédente,
$$\omega_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\beta) + o(1) \quad \underset{\Leftarrow \text{ car } \ln(\beta)\neq 0}{\overset{\uparrow}{\Leftrightarrow}} \quad \lim_{n\to+\infty} \omega_n = \ln(\beta).$$
Donc d'après le lemme de Cesàro, on a
$$\ln(\beta) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \omega_k \quad \underset{\Rightarrow \text{ car } \ln(\beta)\neq 0}{\overset{\uparrow}{\Leftrightarrow}} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_k \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\beta) + o(1).$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(w_{k+1} - w_k).$$
On reconnait donc une somme télescopique. Donc
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_k = \frac{1}{n}(w_{n+1} - w_1) = \frac{w_{n+1}}{n} - \frac{w_1}{n}$$
Par conséquent,
$$\frac{w_{n+1}}{n} - \frac{w_1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\beta) + o(1) \quad \Leftrightarrow \quad w_{n+1} = n\ln(\beta) + o(n) + \underbrace{w_1}_{\underset{n\to+\infty}{=} o(n)} \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(\beta) + o(n).$$
Or $\ln(\beta) \neq 0$. Conclusion,
$$\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(\beta).}$$

Problème III - Polynômes et suites numériques

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$(E) \qquad P\left(X^2-1\right) = P\left(X-1\right)P\left(X+1\right).$$

Partie 1 : Plantons des racines

1. Soit $c \in \mathbb{C}$ et $P = c$ le polynôme constant égal à c. Alors, on a

$$P \text{ solution de } (\textbf{??}) \quad \Leftrightarrow \quad c = c \times c \quad \Leftrightarrow \quad c = 0 \text{ OU } c = 1.$$

Conclusion, les polynômes constants solutions de (**??**) sont

$$\boxed{P = 1 \text{ OU } P = 0.}$$

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $P = aX + b$. On suppose P de degré 1 i.e. $a \neq 0$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (\textbf{??}) \quad &\Leftrightarrow \quad a\left(X^2-1\right) + b = \left(a\left(X-1\right)+b\right)\left(a\left(X+1\right)+b\right) \\
&\Leftrightarrow \quad aX^2 + b - a = \left(aX + b - a\right)\left(aX + b + a\right) \\
&\Leftrightarrow \quad aX^2 + b - a = a^2X^2 + \left(ab + a^2 + ab - a^2\right)X + \left(b-a\right)\left(b+a\right) \\
&\Leftrightarrow \quad aX^2 + b - a = a^2X^2 + 2abX + \left(b^2 - a^2\right).
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (\textbf{??}) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = a^2 \\ 0 = 2ab \\ b - a = \left(b-a\right)\left(b+a\right) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ -1 = -1 \end{cases} \qquad \text{car } a \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad P = X.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'unique polynôme de degré 1 solution de (**??**) est

$$\boxed{\text{L'unique polynôme de degré 1 solution de } (\textbf{??}) \text{ est } P = X.}$$

3. On suppose pour toute la suite P non constant. On note $d = \deg\left(P\right)$.

$$\boxed{\text{Alors, par le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe } a \in \mathbb{C} \text{ tel que } P(a) = 0.}$$

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. On pose $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n.$$

4. On procède par récurrence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $P\left(u_n\right) = 0$ ».

Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = a$ et par hypothèse a est une racine de P. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. que u_n est une racine de P. Montrons alors que u_{n+1} est aussi une racine de P. Par définition de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$. Alors on a

$$P\left(u_{n+1}\right) = P\left(u_n^2 + 2u_n\right) = P\left(\left(u_n+1\right)^2 - 1\right)$$

Donc en évaluant (**??**) en $X = u_n + 1$, on obtient que

$$P\left(u_{n+1}\right) = P\left(u_n + 1 - 1\right) P\left(u_n + 1 + 1\right) = P\left(u_n\right) P\left(u_n + 2\right).$$

Donc par hypothèse de récurrence,

$$P\left(u_{n+1}\right) = 0_{\mathbb{C}} \times P\left(u_n + 2\right) = 0_{\mathbb{C}}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On a donc bien

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est une racine de } P.}$$

Partie 2 : Le coupable est un mono

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}$ et on définit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x \end{array}$.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$. Or $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $f(-1) = 1 - 2 = -1$. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   On observe alors que l'ensemble image de f est $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$. En particulier,

$$\boxed{u_1 = f\left(u_0\right) \in [-1; +\infty[\,.}$$

6. On suppose $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) On note par la question précédente, la stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et le théorème de la bijection, on note que $f\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_+^*$. Donc $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f et $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Par suite, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, on observe que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n = u_n^2 + u_n + u_n > 0 + u_n = u_n.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } \left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$$

   (b) Puisque la suite est strictement croissante, on en déduit que pour tout $(p, q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, $p < q$, on a $u_p < u_q$ et donc $u_p \neq u_q$. Ainsi, l'ensemble

$$\left\{ u_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ est infini.}$$

   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P. On en déduit donc que P admet une infinité de racines. Conclusion,

$$\boxed{P = 0 \text{ ce qui contredit le fait que } P \text{ n'est pas constant.}}$$

7. On suppose que $u_1 \in \,]-1; 0[$ et soit $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x + 2 - 1 = 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$. Or $g(-1/2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 2$. On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	0	$+\infty$
g	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\frac{1}{4}$	↗ 0	↗ $+\infty$

(b) Par la question **??** et le théorème de la bijection, on observe que $f(]-1;0[) =]-1;0[$. Donc $]-1;0[$ est stable par f, $u_1 \in]-1;0[$ et donc par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]-1;0[$. Donc par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(u_n) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(u_n) < u_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} < u_n.$$

Donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$$

De plus elle est minorée par -1 donc par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

On note ℓ sa limite. Par la stricte décroissance de la suite, $\forall n \geqslant 2$, $u_n < u_1$. Donc par passage à la limite, $\ell \leqslant u_1$. Or $u_1 < 0$ donc $\ell < 0$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a$f(u_n) = u_{n+1}$ donc par passage à la limite et continuité de la fonction f, on a

$$f(\ell) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad f(\ell) - \ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(\ell) = 0.$$

Donc par ce qui précède $\ell = -1$ ou $\ell = 0$. Or $\ell < 0$ donc $\ell = -1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } -1.}$$

(c) Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement monotone, on en déduit qu'elle prend une infinité de valeurs différentes et donc P admet une infinité de racines. Conclusion,

$$\boxed{P = 0 \text{ ce qui contredit le fait que } P \text{ n'est pas constant.}}$$

8. Supposons que -1 soit une racine de P. Alors, pour $X = -2$, on a par (**??**),

$$P(4-1) = P(-2-1)\,P(-2+1) \quad \Leftrightarrow \quad P(3) = P(-3)\,P(-1) = 0.$$

Dans ce cas, 3 est aussi une racine. En posant $u_0 = 3$, on trouve alors $u_1 = 9 + 6 = 15 \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui est impossible d'après la question **??**. Conclusion,

$$\boxed{-1 \text{ n'est pas une racine de } P.}$$

Or on a vu que u_1 est forcément une racine de P. Donc $u_1 \neq -1$. Par les questions précédentes, nous savions déjà que $u_1 \in [-1;+\infty[$ mais que les cas $u_1 > 0$ et $u_1 \in]-1;0[$ sont impossibles. Conclusion,

$$\boxed{u_1 = 0.}$$

9. Par la question précédente, on a
$$f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ OU } a = -2.$$
Cependant si $a = -2$, alors en prenant $X = -3$, on a
$$P(8) = P\left((-3)^2 - 1\right) = P(-3-1)\,P(-3+1) = P(-4) \times 0 = 0.$$
Donc 8 est une racine de P. Cependant si $u_0 = 8$, alors $u_1 = 64 + 16 > 0$ ce qui est impossible. Donc $a \neq -2$. Conclusion,
$$\boxed{\text{L'unique racine de } P \text{ est } a = 0.}$$

10. Puisque 0 est l'unique racine possible de P dans $\mathbb{C}$, on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $P = X^n$.
Synthèse. Vérifions si ce polynôme fonctionne. Si $P = X^n$, alors on a
$$P\left(X^2 - 1\right) = \left(X^2 - 1\right)^n = ((X-1)(X+1))^n = (X-1)^n (X+1)^n = P(X-1)\,P(X+1),$$
et (**??**) est vérifiée. Conclusion, l'ensemble des solutions de (**??**) est
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{0_{\mathbb{C}[X]}\right\} \cup \left\{ X^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}.}$$
Et cela est cohérent avec la question **??**

Partie 3 : Des racines imaginaires ? C'est Yggdrasil ? (facultatif)

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

11. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}(n)$: « $u_n + 1 = (a+1)^{2^n}$ ».
Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 + 1 = a + 1$ et $(a+1)^{2^0} = (a+1)^1 = a + 1$. Donc $u_0 + 1 = (a+1)^{2^0}$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. $u_n + 1 = (a+1)^{2^n}$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par construction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a
$$u_{n+1} + 1 = u_n^2 + 2u_n + 1 = (u_n + 1)^2.$$
Donc par hypothèse de récurrence,
$$u_{n+1} + 1 = \left((a+1)^{2^n}\right)^2 = (a+1)^{2^n \times 2} = (a+1)^{2^{n+1}}.$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Conclusion, par le principe de récurrence, on a démontré que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + 1 = (a+1)^{2^n}.}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = |u_n + 1|$.

12. Par la question précédente, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$r_n = |u_n + 1| = |a+1|^{2^n}.$$
Posons $q = |a+1|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = q^n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = |a+1|$. De plus,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n = q^{2^n} = v_{2^n}.$$
La fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2^n \end{array}$ est strictement croissante et est donc une extractrice. Conclusion,
$$\boxed{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une sous-suite de la suite géométrique } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de raison } q = |a+1|.}$$

13. On a

- Si $|a+1| > 1$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et donc il en va de même de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si $|a+1| = 1$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et il en va de même de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si $|a+1| \in]0;1[$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et donc il en va de même de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si $|a+1| = 0$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 et il en va de même de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cependant ce cas n'est possible que si $a+1=0$ i.e. $a=-1$ ce qui est exclu car $a \notin \mathbb{R}$ par hypothèse.

14. Nous venons de mentionner que $|a+1| > 0$. Supposons que $|a+1| \neq 1$. Alors d'après la question précédente, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = (|u_n+1|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone et donc prend une infinité de valeurs. Donc $(u_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ admet également une infinité de valeurs et de même pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P, donc dans ce cas P admet une infinité de racines et donc $P=0$ ce qui contredit notre hypothèse de prendre P non constant. Conclusion,

$$\boxed{|a+1| = 1.}$$

15. On démontre de même que $|a-1| = 1$, ce que l'on admet. Puisque $1 = |a+1| = |a-(-1)|$, on en déduit que a est sur le cercle de centre -1 et de rayon 1. De même $|a-1| = 1$ implique que a est sur le cercle de centre 1 de rayon 1. Or par un dessin, on s'aperçoit que l'unique point d'intersection de ces deux cercles est 0. Donc $a=0$ ce qui contredit le fait que $a \notin \mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{P \text{ n'admet aucune racine non réelle.}}$$