Devoir Maison 8
Espaces vectoriels, séries, dimension

A faire pour le jeudi 13 mars

Problème I - Espaces vectoriels et dimension

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $Q_k = \binom{n}{k} X^{n-k}(1-X)^k$ et on introduit également les espaces vectoriels

$$F_k = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(k)}(0) = 0 \right\}$$
$$G_k = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; P(1) = P'(1) = \cdots = P^{(k)}(1) = 0 \right\}.$$

Partie 1 : Du X en dimension 4, c'est de la $4DX$!

Pour $n = 3$, on considère les polynômes suivants :

$$P_0 = (X-1)(X-2)(X-3), \qquad P_1 = X(X-2)(X-3),$$
$$P_2 = X(X-1)(X-3), \qquad P_3 = X(X-1)(X-2).$$

Puis on pose

$$F = \mathrm{Vect}(P_2, P_3)$$
$$G = \left\{ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \right\}$$
$$H = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) \}$$

On admet que F et G sont des espaces vectoriels.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer la dimension de F.
4. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Montrer que $F \subset H$.
6. Montrer que $F \neq H$.
7. En déduire que $\dim(H) = 3$.
8. Déterminer une base de G.
9. Montrer que $G = G_1$ *où G_1 est défini en début de problème.*
10. Déterminer une sous-famille de $(Q_k)_{k \in [\![0;3]\!]}$ qui soit une base de G.
11. Déterminer une base de $H \cap G$ et préciser sa dimension.
12. En déduire $H + G$.

Partie 2 : Un problème hors norme en dimension n, c'est n-orme !

On suppose à nouveau $n \geqslant 1$ quelconque.

13. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Montrer que F_{n-k-1} et G_k sont en somme directe.

14. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(Q_{k+1}, \dots, Q_n) \subset G_k$.

15. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, Q_i = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

    (a) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On pose $R_k = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \lambda_i\, Q_i$. Calculer $Q_k^{(k)}(1)$ puis $R_k^{(k)}(1)$.

    (b) Démontrer que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$.

16. Montrer que $\mathscr{B}_Q = (Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On fixe $k \in [\![0; n-1]\!]$.

17. Déterminer une base et la dimension de G_k.

18. Montrer que $(Q_{k+1}, \dots, Q_n)$ est une base de G_k.

19. Montrer que F_{n-k-1} et G_k sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

20. Déterminer les coordonnées de X^n dans la base $\mathscr{B}_Q = (Q_0, \dots, Q_n)$.

21. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer les coordonnées de 1 dans la base $\mathscr{B}_Q$.

22. (a) Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

    (b) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kQ_k$ et en déduire les coordonnées de X dans la base $\mathscr{B}$.

Partie 3 : La dimension finie, c'est fini

On considère $H' = \{\, P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1) \,\}$ et $D = \mathrm{Vect}\,(X)$.

23. Montrer que $H' \oplus D = \mathbb{R}[X]$.

Problème II - Séries

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = \frac{1}{4}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

On considère également la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f \quad : \quad \begin{aligned} [0;1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - x^2. \end{aligned}$$

1. (a) Déterminer le tableau de variation de f.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4}.$$
   (c) Préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Peut-on en déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$?

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^3$.

3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ et calculer sa somme totale.

4. Soit $x \in [0;1[$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$.

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$.
   (a) Montrer que qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
   $$a_{n+1} \geqslant a_n \frac{\ell+1}{2}.$$
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$,
   $$a_n \geqslant a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}.$$
   (c) Déterminer alors la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

6. Soit $x \in]1;+\infty[$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$ diverge.

7. (a) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

8. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = n u_n$.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$w_{n+1} - w_n = u_n \left(1 - (n+1)\, u_n\right).$$
   (b) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On notera ω sa limite.
   (c) Justifier que $\omega \neq 0$ et en déduire un équivalent de u_n.
   (d) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ et en déduire que $\omega = 1$.