Correction du Devoir Maison 8
Espaces vectoriels, séries, dimension

Du jeudi 13 mars

Problème I - Espaces vectoriels de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $Q_k = \binom{n}{k} X^{n-k}(1-X)^k$ et on introduit également les espaces vectoriels

$$F_k = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(k)}(0) = 0 \right\}$$
$$G_k = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; P(1) = P'(1) = \cdots = P^{(k)}(1) = 0 \right\}.$$

Partie 1 : Du X en dimension 4, c'est de la $4DX$!

Pour $n = 3$, on considère les polynômes suivants :

$$P_0 = (X-1)(X-2)(X-3), \qquad P_1 = X(X-2)(X-3),$$
$$P_2 = X(X-1)(X-3), \qquad P_3 = X(X-1)(X-2).$$

Puis on pose

$$F = \operatorname{Vect}(P_2, P_3)$$
$$G = \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \right\}$$
$$H = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) \}$$

On admet que F et G sont des espaces vectoriels.

1. On observe les points suivants :
   - $H \subset \mathbb{R}_3[X]$ par définition.
   - Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors, $P(0) = 0_{\mathbb{R}} = P(1)$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in H$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in H^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Alors,

   $$R(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda P(1) + \mu R(1) \qquad \text{car } P \in H \text{ et } Q \in H.$$

   Donc $R(0) = R(1)$ i.e. $R \in H$ et H est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,

   $$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_3[X].}$$

2. Montrons que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Alors,

   $$\lambda_0 (X-1)(X-2)(X-3) + \lambda_1 X(X-2)(X-3) + \lambda_2 X(X-1)(X-3) + \lambda_3 X(X-1)(X-2) = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

   En particulier, en évaluant en 0,

   $$\lambda_0(-6) = 0_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_0 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\lambda_1\, X\,(X-2)\,(X-3)+\lambda_2\, X\,(X-1)\,(X-3)+\lambda_3\, X\,(X-1)\,(X-2)=0_{\mathbb{R}[X]}$. En évaluant en 1,

$$\lambda_1\,(1)\,(-1)\,(-2)=0_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1=0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\lambda_2\, X\,(X-1)\,(X-3)+\lambda_3\, X\,(X-1)\,(X-2)=0_{\mathbb{R}[X]}$. On évalue en 2,

$$\lambda_2\,(2)\,(1)\,(-1)\,0_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2=0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\lambda_3\, X\,(X-1)\,(X-2)=0_{\mathbb{R}[X]}$ i.e. $\lambda_3=0_{\mathbb{R}}$. Ainsi,

$$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ (tous les polynômes de $\mathscr{B}$ ont bien un degré inférieur ou égal à 3). De plus,

$$\operatorname{Card}(\mathscr{B})=4=\dim(\mathbb{R}_3[X]).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].}$$

3. Puisque (P_2,P_3) est une sous-famille de $\mathscr{B}$ et que $\mathscr{B}$ est libre d'après la question précédente, on en déduit que (P_2,P_3) est libre. Or par définition de F, (P_2,P_3) engendre F. Donc (P_2,P_3) est une base de F. Conclusion,

$$\boxed{\dim(F)=\operatorname{Card}((P_2,P_3))=2.}$$

4. Posons $\mathscr{B}_F=(P_2,P_3)$. Par la question précédente, $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Posons $\mathscr{B}'_F=(P_0,P_1)$ et $F'=\operatorname{Vect}(\mathscr{B}_G)$. En tant que sous-famille de $\mathscr{B}$ qui est libre, la famille $\mathscr{B}'_F$ est libre. De plus par construction de F', $\mathscr{B}'_F$ engendre F'. Donc $\mathscr{B}'_F$ est une base de F'. Enfin, on sait par la question 2. que $\mathscr{B}=\mathscr{B}'_F\cup\mathscr{B}_F$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Donc par le théorème de la base adaptée :

$$\boxed{F'=\operatorname{Vect}(P_0,P_1) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}_3[X].}$$

5. *Rédaction 1.* Soit $P\in F$. Alors, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $P=\lambda\,P_2+\mu P_3$ i.e.

$$P=\lambda\, X\,(X-1)\,(X-3)\,,+\mu X\,(X-1)\,(X-2)\,.$$

Donc

$$P(0)=\lambda\times 0+\mu\times 0=0_{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad P(1)=\lambda\times 0+\mu\times 0=0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $P\in H$. Ceci étant vrai pour $P\in F$ quelconque, on en déduit que

$$\boxed{F\subset H.}$$

Rédaction 2. On note que $P_2(0)=0=P_2(1)$ et que $P_3(0)=P_3(1)$. Donc $P_2\in H$ et $P_3\in H$. Or $\operatorname{Vect}(P_2,P_3)$ est le plus petit espace vectoriel contenant P_2 et P_3. Conclusion,

$$\boxed{F=\operatorname{Vect}(P_2,P_3)\subset H.}$$

6. Montrons que $1_{\mathbb{R}[X]}\in H\setminus F$. Si $P=1_{\mathbb{R}[X]}$. Alors, $P(0)=1=P(1)$. Donc $P\in H$. Supposons que $P\in F$. Alors, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$1_{\mathbb{R}[X]}=\lambda\,P_2+\mu P_3=\lambda\, X\,(X-1)\,(X-3)+\mu X\,(X-1)\,(X-2)\,.$$

Alors, en évaluant en 0,

$$1=0 \text{ impossible.}$$

Donc $1_{\mathbb{R}[X]}\notin F$. Donc il existe un élément de H qui n'est pas dans F conclusion,

$$\boxed{F\neq H.}$$

7. D'après la question 5. $F \subset H$. Donc $\dim(F) \leqslant \dim(H)$. Supposons $\dim(H) = \dim(F)$. Puisque $F \subset H$, on en déduit que $F = H$ ce qui contredit la question précédente. Donc $\dim(H) > \dim(F)$. Par la question 3. $\dim(H) > 2$ i.e. $\dim(H) \geqslant 3$. Puisque $H \subset \mathbb{R}_3[X]$, on sait aussi que $\dim(H) \leqslant \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Supposons que $\dim(H) = 4$. Alors, $H \subset \mathbb{R}_3[X]$ et $\dim(H) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. Dans ce cas, $H = \mathbb{R}_3[X]$. Montrons que cette assertion est fausse. Si $P = X$, alors on a bien $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et pourtant $P(0) = 0 \neq 1 = P(1)$. Donc $P \notin H$. Donc $H \neq \mathbb{R}_3[X]$. Nécessairement, on en déduit que $\dim(H) \neq 4$. Donc $\dim(H) \leqslant 3$. Or $\dim(H) \geqslant 3$. Conclusion,

$$\boxed{\dim(H) = 3.}$$

8. On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0 \end{cases} \right\} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&= \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \right\} && L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&= \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 & = 2a_2 + 3a_3 - a_2 - a_3 \\ & = a_2 + 2a_3 \\ a_1 = -2a_2 - 3a_3 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ a_2 + 2a_3 + (-2a_2 - 3a_3)X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; (a_2, a_3) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(X^2 - 2X + 1, X^3 - 3X + 2\right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_G = \left(X^2 - 2X + 1, X^3 - 3X + 2\right)$. Alors $\mathscr{B}_G$ engendre G. De plus, la famille $\mathscr{B}_G$ est une famille de polynômes de degrés distincts donc $\mathscr{B}_G$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_G = \left(X^2 - 2X + 1, X^3 - 3X + 2\right) \text{ est une base de } G.}$$

9. On note que $G_1 = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0 \}$. Donc $P \in G_1$ si et seulement si 1 est une racine de multiplicité au moins 2 de P i.e. $(X-1)^2$ divise P. Ainsi,

$$\begin{aligned}
G_1 &= \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \exists Q \in \mathbb{R}_1[X],\ P = (X-1)^2 Q \right\} \\
&= \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = (X-1)^2 (aX + b) \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left((X-1)^2, X(X-1)^2\right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_{G_1} = \left((X-1)^2, X(X-1)^2\right)$. $\mathscr{B}_{G_1}$ engendre G_1 et ses deux polynômes sont de degrés distincts donc $\mathscr{B}_{G_1}$ est libre et est donc une base de G_1. Ainsi,

$$\dim(G_1) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_{G_1}) = 2.$$

Par la question précédente, $\dim(G) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G) = 2$. Ainsi, on observe que

$$\dim(G) = \dim(G_1).$$

Montrons de plus que $G \subset G_1$. Posons $R_1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ et $R_2 = X^3 - 3X + 2$. Alors, on a

$$R_1(1) = 0, \qquad R_1'(1) = 2(1-1) = 0, \qquad R_2(1) = 1 - 3 + 2 = 0, \qquad R_2'(1) = 3 - 3 = 0.$$

Donc $R_1 \in G_1$ et $R_2 \in G_1$. Or l'espace engendré $\mathrm{Vect}\,(R_1, R_2)$ est le plus petit espace vectoriel contenant R_1 et R_2. Ainsi,

$$G = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_G) = \mathrm{Vect}\,(R_1, R_2) \subset G_1.$$

Par égalité des dimensions, on conclut que

$$\boxed{G = G_1.}$$

10. Calculons, on a

$$\begin{aligned} Q_0 &= \binom{3}{0} X^{3-0}(1-X)^0 = X^3, \\ Q_1 &= 3X^2(1-X), \\ Q_2 &= 3X(1-X)^2, \\ Q_3 &= 4X(1-X)^3. \end{aligned}$$

On observe que 1 est racine de multiplicité k de Q_k donc de multiplicité au moins deux de Q_2, Q_3. Dès lors $Q_2 \in G_1$ et $Q_3 \in G_1$. Or Q_2 et Q_3 sont de degrés distincts. Donc (Q_2, Q_3) est libre dans G_1. De plus

$$\mathrm{Card}\,(Q_2, Q_3) = 2 = \dim(G_1).$$

Donc (Q_2, Q_3) est une base de $G_1 = G$. Conclusion,

$$\boxed{(Q_2, Q_3) \text{ est une sous-famille de } (Q_k)_{k\in[\![0;3]\!]} \text{ et est une base de } G = G_1.}$$

11. Par ce qui précède, on a

$$G = G_1 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(1) = P'(1) = 0 \right\}.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a donc

$$\begin{aligned} P \in H \cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(0) = P(1) \\ P(1) = P'(1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad P(0) = P(1) = P'(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X(X-1)^2 \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ P = \lambda X(X-1)^2 \qquad \text{par considération sur le degré.} \\ &\Leftrightarrow \quad P \in \mathrm{Vect}\left(X(X-1)^2\right). \end{aligned}$$

Donc

$$H \cap G = \mathrm{Vect}\left(X(X-1)^2\right).$$

Le polynôme $X(X-1)^2$ étant non nul, on en déduit qu'il forme une famille libre et génératrice de $H \cap G$. Conclusion,

$$\boxed{\left(X(X-1)^2\right) \text{ forme une base de } \mathbb{R}_3[X] \text{ et donc } \dim(H \cap G) = \mathrm{Card}\left(X(X-1)^2\right) = 1.}$$

12. Par les questions précédentes et la formule de Grassmann,

$$\dim(H+G) = \dim(H) + \dim(G) - \dim(H \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X]).$$

Or H et G étant des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$, $H + G$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et donc $H + G \subset \mathbb{R}_3[X]$. Par égalité des dimensions,

$$\boxed{H + G = \mathbb{R}_3[X].}$$

Partie 2 : Un problème hors norme en dimension n, c'est n-orme !

On suppose à nouveau $n \geqslant 1$ quelconque.

13. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Soit $P \in F_{n-k-1} \cap G_k$. Alors,

$$\begin{cases} P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(n-k-1)}(0) = 0 \\ P(1) = P'(1) = \cdots = P^{(k)}(0) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \text{ est une racine de multiplicité au moins } n-k \\ 1 \text{ est une racine de multiplicité au moins } k+1 \end{cases}$$

Donc P admet au total $n+1$ racines comptées avec multiplicité. Or $\deg(P) \leqslant n < n+1$. Conclusion,

$$P = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Ceci étant vrai pour $P \in F_{n-k-1} \cap G_k$ quelconque, on en déduit que $F_{n-k-1} \cap G_k \subset \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$. Or $F_{n-k-1} \cap G_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\} \subset F_{n-k-1} \cap G_k$. Conclusion,

$$\boxed{F_{n-k-1} \cap G_k = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\} \text{ i.e. } F_{n-k-1} \text{ et } G_k \text{ sont en somme directe.}}$$

14. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Soit $i \in [\![k+1; n]\!]$. On a

$$Q_i = \binom{n}{i} X^{n-i} (1-X)^i = (X-1)^{k+1} (-1)^k \binom{n}{i} X^{n-i} (1-X)^{i-k-1} \qquad \text{car } i \geqslant k+1$$

Donc $(X-1)^{k+1}$ divise Q_i et donc 1 est une racine de multiplicité au moins $k+1$ de Q_i. Ainsi,

$$Q_i(1) = Q_i'(1) = \cdots = Q_i^{(k)}(1) = 0.$$

Autrement dit, $\forall i \in [\![k+1; n]\!]$, $Q_i \in G_k$. Or G_k est un espace vectoriel et $\mathrm{Vect}(Q_{k+1}, \ldots, Q_n)$ est le plus petit espace vectoriel contenant les Q_i. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Vect}(Q_{k+1}, \ldots, Q_n) \subset G_k.}$$

15. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

   (a) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On pose $R_k = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \lambda_i Q_i$.

   Par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} Q_k^{(k)} &= \left(\binom{n}{k} (-1)^k X^{n-k} (X-1)^k\right)^{(k)} \\ &= \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(X^{n-k}\right)^{(j)} \left((X-1)^k\right)^{(k-j)} \\ &= \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{\min(k,n-k)} \binom{k}{j} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!} X^{n-k-j} \frac{k!}{j!} (X-1)^j . \end{aligned}$$

   Notamment, en évaluant en 1 tous les termes s'annulent sauf celui d'indice $j=0$,

$$Q_k^{(k)}(1) = \binom{n}{k} (-1)^k \binom{k}{0} \frac{(n-k)!}{(n-k)!} 1^{n-k} \binom{k!}{0!} + 0 = \binom{n}{k} (-1)^k .$$

Conclusion,

$$\boxed{Q_k^{(k)}(1) = \binom{n}{k}(-1)^k\,.}$$

De plus, par linéarité de la dérivation et de l'évaluation, on a

$$R_k^{(k)}(1) = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i\, Q_i^{(k)}(1)\,.$$

On a vu à la question précédente que pour tout $i \geqslant k+1$, 1 est une racine de multiplicité au moins $k+1$ de Q_i et donc en particulier, pour tout $i \geqslant k+1$, $Q_i^{(k)}(1) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{R_k^{(k)}(1) = \lambda_k\, Q_k^{(k)}(1) = \lambda_k \binom{n}{k}(-1)^k\,.}$$

(b) Posons pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$: « $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0_{\mathbb{R}}$ et $R_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ». Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $k=0$, alors par hypothèse de la question, on a $R_0 = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc en particulier $R_0(1) = 0_{\mathbb{R}}$. Or par ce qui précède, $R_0(1) = R_0^{(0)}(1) = \lambda_0 \binom{n}{0}(-1)^0 = \lambda_0$. Donc $\lambda_0 = 0$. On en déduit donc aussi que $0_{\mathbb{R}[X]} = R_0 = \lambda_0\, Q_0 + R_1 = R_1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Alors pour tout $i \leqslant k-1$, $\lambda_i = 0_{\mathbb{R}}$ et $R_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $R_k^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $R_k^{(k)}(1) = 0_{\mathbb{R}}$. Dès lors par la question précédente,

$$\lambda_k \binom{n}{k}(-1)^k = 0_{\mathbb{R}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}$. Or $R_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc

$$\lambda_k\, Q_k + R_{k+1} = 0_{\mathbb{R}[X]} \qquad \Rightarrow \qquad R_{k+1} = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Ainsi, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}$ et $R_{k+1} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Notamment, $\mathscr{P}(n)$ i.e. $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0_{\mathbb{R}}$ et $0_{\mathbb{R}[X]} = R_n = \lambda_n\, Q_n = \lambda_n (1-X)^n$. Donc $\lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$. Conclusion,

$$\boxed{\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}.}$$

16. Par la question précédente, $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est libre. Or $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_Q) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Conclusion,

$$\boxed{(Q_0, \ldots, Q_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

On fixe $k \in [\![0;n-1]\!]$.

17. On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned}
G_k &= \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid 1 \text{ est une racine de multiplicité au moins } k+1\} \\
&= \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \,\middle|\, (X-1)^{k+1} \text{ divise } P\right\} \\
&= \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \,\middle|\, \exists Q \in \mathbb{R}_{n-k}[X],\ P = (X-1)^{k+1} Q\right\} \\
&= \left\{(X-1)^{k+1}\left(a_0 + \cdots + a_{n-k}X^{n-k}\right) \,\middle|\, (a_0, \ldots, a_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k+1}\right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left((X-1)^{k+1}, X(X-1)^{k+1}, \ldots, X^{n-k-1}(X-1)^{k+1}\right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_{G_k} = \left((X-1)^{k+1}, X(X-1)^{k+1}, \ldots, X^{n-k-1}(X-1)^{k+1}\right)$. Par ce qui précède $\mathscr{B}_{G_k}$ engendre G_k. De plus cette famille est libre en tant que famille de polynômes de degrés distincts. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_{G_k} \text{ est une base de } G_k \text{ et } \dim(G_k) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_{G_k}) = n-k.}$$

18. On a vu à la question 14. que $\text{Vect}\,(Q_{k+1}, \ldots, Q_n) \subset G_k$. Donc $(Q_{k+1}, \ldots, Q_n)$ est une famille de vecteurs de G_k. De plus,
$$\text{Card}\,(Q_{k+1}, \ldots, Q_n) = n - k = \dim(G_k)\,.$$
Enfin, en tant que sous-famille de $\mathscr{B}_Q$, $(Q_{k+1}, \ldots, Q_n)$ est libre. Conclusion,
$$\boxed{(Q_{k+1}, \ldots, Q_n) \text{ est une base de } G_k.}$$

19. De la même façon que pour G_k, on observe que
$$\begin{aligned} F_{n-k-1} &= \{\, P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \ 0 \text{ est une racine de multiplicité au moins } n-k \ \} \\ &= \text{Vect}\left(X^{n-k}, X^{n-k+1}, \ldots, X^n\right). \end{aligned}$$
Donc $\left(X^{n-k}, X^{n-k+1}, \ldots, X^n\right)$ engendre F_{n-k-1} et est libre en tant que famille de polynômes de degrés distincts donc est une base de F_{n-k-1}. Ainsi,
$$\dim(F_{n-k-1}) = \text{Card}\left(X^{n-k}, X^{n-k+1}, \ldots, X^n\right) = n - (n-k) + 1 = k+1.$$
Dès lors, on obtient que
$$\dim(F_{n-k-1}) + \dim(G_k) = k + 1 + n - k = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])\,.$$
De plus, par la question 13. F_{n-k+1} et G_k sont en somme directe. Conclusion,
$$\boxed{F_{n-k+1} \text{ et } G_k \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_n[X].}$$

20. On a $Q_0 = \binom{n}{0} X^n (1-X)^0 = X^n$. Donc directement $X^n = 1 \times Q_0 + 0 \times Q_1 + \cdots + 0 \times Q_n$. Conclusion,
$$\boxed{\text{les coordonnées de } X^n \text{ dans } (Q_0, \ldots, Q_n) \text{ sont } (1, 0, \ldots, 0).}$$

21. Par la formule du binôme de Newton, on a
$$\sum_{k=0}^{n} Q_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} (1-X)^k = (X + 1 - X)^n = 1^n = 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{les coordonnées de } 1 \text{ dans } (Q_0, \ldots, Q_n) \text{ sont } (1, 1, \ldots, 1).}$$

22. (a) Soit $k \in [\![1; n]\!]$, on a
$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall k \in [\![1; n]\!], \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.}$$

(b) On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kQ_k &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}X^{n-k}(1-X)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}X^{n-k}(1-X)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}X^{n-k}(1-X)^k && \text{par la question précédente et } k\geqslant 1 \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}X^{n-k-1}(1-X)^{k+1} && \text{en posant } \tilde{k}=k-1 \\
&= n(1-X)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}X^{n-k-1}(1-X)^{k} \\
&= n(1-X)(X+1-X)^{n-1} && \text{par la formule du binôme de Newton} \\
&= n-nX.
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $n\geqslant 1$,

$$X = 1-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} kQ_k.$$

Par la question 21.

$$X = \sum_{k=0}^{n} Q_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} kQ_k = \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)Q_k.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les coordonnées de } X \text{ dans } (Q_0,\dots,Q_n) \text{ sont } \left(1,\frac{n-1}{n},\frac{n-2}{n},\dots,\frac{1}{n},0\right).}$$

Vérification : pour $n=3$, $Q_0=X^3$, $Q_1=3X^2(1-X)=3X^2-3X^3$, $Q_2=3X(1-X)^2=3X-6X^2+3X^3$ *et* $Q_3=(1-X)^3=1-3X+3X^2+X^3$. *Alors,*

$$1\times Q_0+\frac{2}{3}\times Q_1+\frac{1}{3}\times Q_2+0\times Q_3 = X^3+2X^2-2X^3+X-2X^2+X^3 = X.\ \textit{OK !}$$

Partie 3 : La dimension finie, c'est fini

On considère $H'=\{\,P\in\mathbb{R}[X]\mid P(0)=P(1)\,\}$.

23. Procédons par analyse/synthèse. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$.

Analyse. Supposons que $P\in H'+\mathbb{R}_0[X]$. Alors, il existe $Q\in H'$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $P=Q+\lambda X$. Donc $Q=P-\lambda X$. Puisque $Q\in H'$, on a

$$\begin{aligned}
Q(0)=Q(1) \quad &\Leftrightarrow \quad P(0)-\lambda\times 0=P(1)-\lambda\times 1 \\
&\Leftrightarrow \quad P(0)=P(1)-\lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda=P(1)-P(0).
\end{aligned}$$

Donc λ est fixée de façon unique. Puis $Q=P-\lambda X$ l'est également. Ainsi, si la décomposition de P existe, elle est nécessairement unique, ce qui démontre que H' et D sont supplémentaires.

Synthèse. Posons $\lambda=P(1)-P(0)$ et $Q=P-\lambda X$. Alors, on observe les points suivants.

- $Q+\lambda X=P-\lambda X+\lambda X=P$.

- $\lambda X \in \text{Vect}(X) = D$ ok.
- $Q(0) = P(0)$ et $Q(1) = P(1) - \lambda = P(1) - (P(1) - P(0)) = P(0)$. Donc $Q(0) = Q(1)$ et donc $Q \in H'$.

D'où, $P \in H' + D$. Ceci étant vrai pour P quelconque dans $\mathbb{R}[X]$, on obtient que $\mathbb{R}[X] = H' + D$ et l'existence de la décomposition pour tout polynôme.

On a donc démontré l'existence et l'unicité de la décomposition pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Conclusion,

$$\boxed{H' \oplus D = \mathbb{R}[X].}$$

Problème II - Séries

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = \frac{1}{4}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

On considère également la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f \quad : \quad \begin{aligned}[t] [0;1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - x^2. \end{aligned}$$

1. (a) La fonction f étant polynomiale sur $[0;1]$ est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$,

$$f'(x) = 1 - 2x.$$

En particulier, pour $x \in [0;1]$, on a les équivalences suivantes

$$f'(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \geqslant 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leqslant \frac{1}{2}.$$

De plus $f(0) = f(1) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

(b) On procède par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{P}_n \qquad « \; 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4} \; ».$$

Initialisation. Si $n = 0$ alors $u_0 = \frac{1}{4}$ et donc on a bien $0 < u_0 \leqslant \frac{1}{4}$ i.e. $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On sait que $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4} \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}$. Or d'après la question précédente, la fonction f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc

$$f(0) < f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{n+4}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+4} - \frac{1}{(n+4)^2} = \frac{n+4-1}{(n+4)^2} = \frac{n+3}{(n+4)^2}.$$

Comparons $\frac{n+3}{(n+4)^2}$ à $\frac{1}{n+5}$. On a les équivalence suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{n+3}{(n+4)^2} \leqslant \frac{1}{n+5} \quad &\Leftrightarrow \quad (n+3)(n+5) \leqslant (n+4)^2 \qquad \text{car } n+5>0 \text{ et } (n+4)^2>0\\
&\Leftrightarrow \quad n^2+8n+15 \leqslant n^2+8n+16\\
&\Leftrightarrow \quad 15 \leqslant 16.
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que $\frac{n+3}{(n+4)^2} \leqslant \frac{1}{n+5}$ et donc par transitivité,

$$0 < u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+5}.$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.
Finalement on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4}.}$$

(c) D'après la question précédente et le théorème d'encadrement, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ne diverge donc pas grossièrement mais

$$\boxed{\text{on ne peut conclure à cette étape de sa convergence ou non}}$$

(et l'inégalité précédente n'est pas assez précise pour utiliser le théorème de comparaison).

2. Par la question 1.b et stricte croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < u_n^3 \leqslant \frac{1}{(n+4)^3} \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^3 \text{ converge.}}$$

3. Par définition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 = u_n - u_{n+1}.$$

On reconnait alors une somme télescopique, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}.$$

Or par la question 1.c $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0 - 0 = \frac{1}{4}.}$$

4. Soit $x \in [0;1[$. Par la question 1.(b), puisque $x \geqslant 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n x^n \leqslant \frac{x^n}{n+4} \leqslant x^n.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge en tant que série géométrique de raison $x \in [0;1[$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n \text{ converge.}}$$

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$.

   (a) Puisque $\ell = \frac{\ell+\ell}{2} > \frac{\ell+1}{2}$. Par définition de la limite, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\ell+1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est strictement positif. Donc $a_{n+1} \geqslant a_n \frac{\ell+1}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad a_{n+1} \geqslant a_n \frac{\ell+1}{2}.}$$

   (b) On pose pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}_n$ la propriété « $a_n \geqslant a_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}$ ». Montrons que $\mathscr{P}_n$ est vraie par récurrence.
   Initialisation. Si $n = n_0$ alors, $a_{n_0} = a_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0-n_0}$ et donc $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \geqslant n_0$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Alors par la question précédente (car $n \geqslant n_0$) puis l'hypothèse de récurrence,

$$a_{n+1} \underset{Q4.(b)}{\geqslant} a_n \frac{\ell+1}{2} \underset{H.R.}{\geqslant} a_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \frac{\ell+1}{2} = a_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n+1-n_0}.$$

   Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion. Pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.
   On a donc montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \quad a_n \geqslant a_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}.}$$

   (c) On sait que $\ell > 1$. Donc $\frac{\ell+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ diverge en tant que série géométrique de raison $q = \frac{\ell+1}{2} > 1$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n_0}}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0}}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ diverge également car $\frac{a_{n_0}}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0}} > 0$. Or pour tout $n \geqslant n_0$, on a montré à la question précédente que

$$0 \leqslant a_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \leqslant a_n.$$

   Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ diverge.}}$$

6. Soit $x \in]1;+\infty[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n x^n$. D'après la question 1.(b), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = \frac{u_n - u_n^2}{u_n} x = (1-u_n)\,x.$$

Donc d'après la question 1.(c), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x.$$

Puisque $x > 1$, il découle de la question 4 que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n \text{ diverge.}}$$

7. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\right].$$

On reconnait une série télescopique. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) = \ln(u_{n+1}) + \ln(4).$$

Or d'après la question 1.(c), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(u_{n+1}) + \ln(4) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ diverge.}}$$

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1-u_n)$. Or d'après la question 1.(c), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n \qquad \Leftrightarrow \qquad -\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

De plus, d'après la question précédente, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} -\ln(1-u_n)$ diverge. Or $-\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (d'après la question 1.(b)) donc par le théorème des équivalents pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge.}}$$

8. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = nu_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de w_n puis de u_n,

$$w_{n+1} - w_n = (n+1)\,u_{n+1} - nu_n = (n+1)\left(u_n - u_n^2\right) - nu_n = u_n - (n+1)\,u_n^2.$$

En factorisant par u_n, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n = u_n\left(1 - (n+1)\,u_n\right).}$$

(b) D'après la question 1.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4}$ et donc $(n+1)\,u_n \leqslant \frac{n+1}{n+4} \leqslant 1$. Donc $1-(n+1)\,u_n$ et on a toujours $u_n \geqslant 0$. Donc d'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n \geqslant 0.$$

Autrement dit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Or, toujours par la question 1.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = nu_n \leqslant \frac{n}{n+4} \leqslant 1$. Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

On note ω sa limite.

(c) Puisque $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on en déduit que $\omega \geqslant w_1 = 1 \times u_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} > 0$. Donc $\omega \neq 0$. Le réel ω étant non nul et la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \omega \qquad \Leftrightarrow \qquad nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \omega \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\omega}{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\omega \neq 0 \qquad \text{et} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\omega}{n}.}$$

(d) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ est une série télescopique. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (w_{k+1} - w_k) = w_{n+1} - w_0 = w_{n+1}.$$

Or nous avons vu à la question 7.(b) que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers ω). On en déduit donc que $\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ est une série convergente (et sa somme totale vaut ω). D'autre part, par les questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &\underset{Q7.(a)}{=} u_n\left(1 - (n+1)\, u_n\right) \\
&\underset{Q7.(c)}{=} \left(\frac{\omega}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - (n+1)\left(\frac{\omega}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \left(\frac{\omega}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \omega + o\left(1\right)\right) \\
&= \frac{\omega\left(1-\omega\right)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Procédons maintenant par un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\omega \neq 1$. On a déjà vu à la question précédente que $\omega \neq 0$. Donc on en déduit que $\omega\left(1-\omega\right) \neq 0$ et par suite,

$$w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\omega\left(1-\omega\right)}{n}.$$

De plus on a vu à la question 7.(b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$. Or deux séries dont les termes généraux sont équivalents et de signe constant ont même nature. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\omega(1-\omega)}{n}$. Or d'une part, on a vu que $\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ converge et d'autre part, puisque $\omega\left(1-\omega\right) \neq 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\omega(1-\omega)}{n} = \omega\left(1-\omega\right) \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que multiple de la série harmonique ce qui contredit le fait que les séries sont de même nature. Conclusion,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n) \text{ converge et } \omega = 1.}$$