Devoir Maison 9
Séries et applications linéaires

A faire pour le jeudi 10 avril

Problème I - Séries

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{1}{n2^n}, \qquad b_n = -\frac{1}{n(n+1)2^n}, \qquad b_0 = 1, \qquad c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

On admet le résultat suivant :

Théorème I.1 (Formule de Taylor - Reste intégral)

Soient U un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur U. Alors, pour tout $x \in U$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Quand tout le monde se précipite en série vers Hélène

1. (a) Etudier la convergence absolue de chacune de ses séries suivantes : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n$.

   (b) En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

2. Soit $x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$J_n(x) = \int_0^x (-1)^n \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Justifier que $J_n(x)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Si $x \in [0;1]$. Montrer que pour tout $t \in [0;x]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t} \leqslant (x-t)^n$$

   et en déduire que $|J_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   (c) Si $x \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$. Montrer que pour tout $t \in [x;0]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t}\right| \leqslant 2^{n+1}(t-x)^n$$

   et en déduire que à nouveau que $|J_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Dans tous les cas, pour $x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$, on obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|J_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

3. Déduire de la question précédente que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n$ converge vers $\ln(2)$.

4. En utilisant 2.d pour une autre valeur de x, montrer également que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln(2)$.

5. A l'aide de la question précédente, montrer enfin que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \ln(2)$.

Partie 2 : Pour devenir un Euler Prime, il faut savoir faire une transformée d'Abel

On considère dans cette partie $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs convergente et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente. On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

6. Préciser la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

8. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (U_{n-1} - U_n)\, v_n$ converge absolument.

9. En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n v_n$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, son reste d'ordre n est donné par
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (U_{k-1} - U_k)\, v_k$$

10. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge, montrer alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n v_n$ converge puis que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = U_n v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k (v_{k+1} - v_k)\,.$$

Partie 3 : Il ne reste plus qu'à être le plus rapide pour bien (se dé)tendre

On pose désormais pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k, \qquad U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|B_n| \leqslant \frac{A_n}{n+1}$$
et en déduire une relation de prépondérance entre A_n et B_n au voisinage de $+\infty$.

12. A l'aide de la partie précédente, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A_n = \frac{1}{2^n (n+1)} + B_n.$$

13. En déduire un équivalent le plus simple possible de A_n.

14. En procédant de même, montrer que $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2 2^n}$

Problème II - Applications linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)I_n$$

Partie 1 : En suivant la trace laissée par le noyau, vous verrez une belle image

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Calculer $\mathrm{Tr}(M)$.
3. En déduire $\mathrm{Ker}\,(f)$.
4. L'application f est-elle injective ? Est-ce un isomorphisme ? un automorphisme ?
5. En déduire $\mathrm{Im}\,(f)$.
6. (a) Calculer $f^2 - (n+2)\,f + (n+1)\,\mathrm{Id}_E$.
   (b) En déduire f^{-1}.

Partie 2 : La dimension quatre, c'est facile à abattre

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$.

7. Rappeler la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis calculer $f(\mathscr{B})$.
8. Déterminer une base $\mathscr{B}_0$ de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$, le noyau de la trace, puis préciser sa dimension.
9. En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}\,(I_2) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
10. En déduire une base $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathscr{B}',\ f(M) \text{ et } M \text{ sont colinéaires}$$

Partie 3 : Mais la dimension n, c'est pas pour les hyènes

Dans cette partie, n désigne à nouveau un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque.

11. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ sont en somme directe.
12. Soient $M \in \mathscr{M}_n\,(\mathbb{R})$, $A \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ et $B \in \mathrm{Vect}\,(I_n)$ telles que $M = A + B$. Exprimer B puis A en fonction de M.
13. Déduire de la question précédente que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ sont supplémentaires.
14. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$.
15. Préciser p la projection sur $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ et s la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$.
16. Montrer les égalités suivantes :

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_n)$$

17. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}\,(I_n)$ et $\mathrm{Im}\,(f - (n+1)\,\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$.
18. Montrer que ces inclusions sont des égalités à l'aide du théorème du rang.