Correction du Devoir Maison 9
Séries et applications linéaires

Du jeudi 13 mars

Problème I - Séries

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{1}{n2^n}, \qquad b_n = -\frac{1}{n(n+1)2^n}, \quad b_0 = 1, \qquad c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Partie 1 : Quand tout le monde se précipite en série vers Hélène

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant a_n = |a_n| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n}$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in [0;1[$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|$ converge i.e.

$\boxed{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \text{ converge absolument}}$.

De même, on a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant |b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ (encore vrai si $n = 0$). Donc

$\boxed{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n \text{ converge absolument}}$.

A contrario, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|c_n| = \frac{1}{n}$. Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |c_n|$ diverge en tant que série harmonique ou en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$. Conclusion,

$\boxed{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} c_n \text{ ne converge pas absolument}}$.

(b) La convergence absolue impliquant la convergence, on en déduit de la question précédente que

$\boxed{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \text{ et } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n \text{ convergent}}$.

2. Soit $x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$J_n(x) = \int_0^x (-1)^n \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$, on a $1+t \geqslant 1/2 > 0$. Donc la fonction $t \mapsto (-1)^n \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t}$ est bien définie et même continue sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$. Donc par le théorème fondamentale de l'analyse, J_n existe et est même $\mathscr{C}^1$ sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$. Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ J_n(x) \text{ existe}}$.

(b) Si $x \in [0;1]$. Pour tout $t \in [0;x] \subset [0;1]$, on a $1+t \geqslant 1$ et $x - t \geqslant 0$ et donc

$$\boxed{\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t} \leqslant (x-t)^n \times 1 = (x-t)^n}.$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale, car $x \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
|J_n(x)| &= \left|\int_0^x (-1)^n \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^x \left|(-1)^n \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t}\right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^x (x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-(x-t)^n}{n+1}\right]_{t=0}^{t=x} \\
&= 0 + \frac{(x)^{n+1}}{n+1} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{|J_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

(c) Si $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$. Pour tout $t \in [x;0] \subset \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, on a $1+t \geqslant 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $|x-t| = t-x$ et donc

$$\boxed{\left|\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t}\right| = \left(\frac{t-x}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t} \geqslant (2(t-x))^n \times 2 = 2^{n+1}(t-x)^n.}$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale, car $x \leqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
|J_n(x)| &= \left|\int_0^x (-1)^n \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_x^0 \left|(-1)^n \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1}{1+t}\right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_x^0 2^{n+1}(t-x)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \left[2^{n+1}\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=x}^{t=0} \\
&= 2^{n+1}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1} - 0.
\end{aligned}$$

Or $-x \leqslant \frac{1}{2}$. Donc

$$\boxed{|J_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

(d) On pose $f : u \mapsto \ln(1+u)$ qui est bien définie sur $U = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est même $\mathscr{C}^{n+1}$ sur U de plus,

$$\forall u \in U, \qquad f'(u) = \frac{1}{1+u}, \qquad f''(u) = \frac{-1}{(1+u)^2}, \qquad f^{(3)}(u) = \frac{2}{(1+u)^3}.$$

Puis par récurrence, pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$,

$$\forall u \in U, \qquad f^{(k)}(u) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+u)^k}.$$

Donc par le théorème de Taylor-Lagrange, pour $u = x$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \ln(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+0)^k}\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{(-1)^{n+2}\,n!}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (-1)^n \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + J_n(x).$$

Donc d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}\right| = |J_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

3. Pour $x = 1 \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} c_k\right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} c_k = 0.$$

Conclusion,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k = \ln(2).$$

La série $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n \text{ converge}}$ et sa somme totale est donnée par

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \ln(2).}$$

4. Prenons maintenant $x = -\frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. Par 2.d, on obtient que

$$\left|\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\left|\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}}{k2^k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

ou encore
$$\left|-\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{k2^k}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\qquad\Leftrightarrow\qquad\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}$$

Donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(2)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}=0$. Conclusion, $\boxed{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}a_n \text{ converge}}$ et sa somme totale vaut
$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}a_k=\ln(2).}$$

5. On remarque pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la décomposition suivante :
$$\frac{1}{n(n+1)2^n}=\frac{1}{(n+1)2^n}-\frac{1}{n2^n}=\frac{2}{(n+1)2^{n+1}}-\frac{1}{n2^n}=2a_{n+1}-a_n.$$
Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}b_k&=b_0+\sum_{k=1}^{n}b_k\\&=1+2\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}a_k\\&\underset{\tilde{k}=k+1}{=}1+2\sum_{k=2}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=1+2a_{n+1}+2\sum_{k=1}^{n}a_k-2a_1-\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=1+\frac{2}{(n+1)2^{n+1}}-2\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=\frac{1}{(n+1)2^n}+\sum_{k=1}^{n}a_k.\end{aligned}$$
Or par la question précédente $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}a_n$ converge vers $\ln(2)$ donc $\boxed{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}b_n \text{ converge}}$ et sa somme totale est donnée par
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}b_n=\ln(2).}$$

Partie 2 : Pour devenir un Euler Prime, il faut savoir faire une transformée d'Abel

On considère dans cette partie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ une série à termes positifs convergente et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. On pose également pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k$.

6. Par hypothèse, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant0$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$U_{n+1}-U_n=\sum_{k=n+2}^{+\infty}u_k-\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k=-u_{n+1}\leqslant0.$$
Ainsi, $\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

7. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Or toute suite convergente est bornée. Donc la suite $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée}}$.

8. Par la question précédente, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant |(U_{n-1} - U_n)\, v_n| = (U_{n-1} - U_n)\, |v_n|$$
car $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant |(U_{n-1} - U_n)\, v_n| \leqslant M\,(U_{n-1} - U_n)\,.$$
Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Donc nécessairement, la suite des restes tend vers 0 : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$. De plus, par télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} (U_{k-1} - U_k) = U_0 - U_n.$$
Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} M\,(U_{n-1} - U_n)$ converge vers MU_0. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |(U_{n-1} - U_n)\, v_n|$ converge. Autrement dit

$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (U_{n-1} - U_n)\, v_n \text{ converge absolument}}$.

9. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n-1} - U_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_n$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n} (U_{k-1} - U_k)\, v_k.$$
Donc d'après la question précédente, $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n v_n \text{ converge}}$. De plus de l'égalité précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (U_{k-1} - U_k)\, v_k.}$$
Formule qui reste vraie si $n = 0$.

10. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \geqslant 0.$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leqslant |U_n v_n| = |v_n|\, U_n \leqslant MU_n.$$
Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge par hypothèse. Donc il en va de même pour $\sum_{n\in\mathbb{N}} MU_n$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |U_n v_n|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n v_n$ converge. Or la convergence absolue implique la convergence. Donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n v_n \text{ converge}}$. De même $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_{n-1} v_n$

converge. Il est donc possible de scinder la somme de la question précédente. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (U_{k-1} - U_k) v_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_{k-1} v_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k v_k.$$

Soit $N \geqslant n+1$. Alors

$$\sum_{k=n+1}^{N} U_{k-1} v_k - \sum_{k=n+1}^{N} U_k v_k \underset{\tilde{k}=k-1}{=} \sum_{k=n}^{N-1} U_k v_{k+1} - \sum_{k=n+1}^{N} U_k v_k = U_n v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{N-1} U_k (v_{k+1} - v_k) + U_N v_N$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n v_n$ converge, on a $U_N v_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par convergence des différents termes et passage à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient

$$\boxed{R_n = U_n v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k (v_{k+1} - v_k).}$$

Partie 3 : Il ne reste plus qu'à être le plus rapide pour bien (se dé)tendre

On pose désormais pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k, \qquad U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $N \geqslant n+1$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} b_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} |b_k| = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

Or pour tout $k \geqslant n+1$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$, donc $\frac{1}{k(k+1)2^k} \leqslant \frac{1}{n+1}\frac{1}{k2^k}$. Ainsi,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} b_k\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{N} a_k$$

Donc par passage à la limite quand $N \to +\infty$ (et la continuité de la valeur absolue),

$$|B_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \frac{A_n}{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |B_n| \leqslant \frac{A_n}{n+1}.}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \geqslant a_{n+1} > 0$. Donc par encadrement $\lim_{n\to+\infty} \frac{|B_n|}{A_n} = 0$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{B_n}{A_n}\right| = 0$ ce qui est aussi équivalent à $\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{A_n} = 0$. Conclusion,

$$\boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\ll} A_n.}$$

12. On a les points suivants :

- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ est une série à termes positifs convergente en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in [0;1[$.
- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ donc est une suite convergente.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{N-(n+1)+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{1-\frac{1}{2}}.$$
Donc par passage à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{2^n}$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est une série géométrique de raison $1/2 \in [0;1[$ et est donc convergente.

Donc d'après la question 10. avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n v_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n v_n$ converge et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k = U_n v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k \left(v_{k+1} - v_k\right).$$
c'est-à-dire dans ce cas,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{2^n}\frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A_n = \frac{1}{2^n(n+1)} + B_n.}$$

13. Puisque $B_n \underset{n\to+\infty}{=} o(A_n)$, on a
$$A_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2^n(n+1)} + o(A_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad A_n + o(A_n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2^n(n+1)}.$$
Ainsi
$$A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n(n+1)}.$$
Attention, on peut simplifier l'équivalent (et il faut donc le faire). On a $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Donc par produit puis inverse, $\frac{1}{2^n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n2^n}$. Conclusion,
$$\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n2^n}.}$$

14. Posons cette fois-ci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = -\frac{1}{n(n+1)}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n}$. Alors on a toujours
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente (vers 0).

Donc d'après la question 10.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = -\frac{1}{2^n (n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\left(-\frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{k(k+1)}\right)$$
$$= -\frac{1}{2^n (n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

Or pour tout $N \geqslant n+1$,

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2^k}\frac{2}{k(k+1)(k+2)} \leqslant \frac{2}{n+3}\sum_{k=n+1}^{N}(-b_k).$$

Donc par passage à la limite sur N, (possible car $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ sont convergentes) on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\frac{2}{k(k+1)(k+2)} \leqslant -\frac{2B_n}{n+3}.$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\frac{2}{k(k+1)(k+2)} \underset{n\to+\infty}{=} o(B_n)$. Donc

$$B_n + o(B_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2^n (n+1)(n+2)}.$$

Ainsi,

$$B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2^n (n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2 2^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2 2^n}.}$$

Problème II - Applications linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)I_n$$

Partie 1 : En suivant la trace laissée par le noyau, vous verrez une belle image

1. L'application f est bien définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= \lambda M + \mu N + \mathrm{Tr}(\lambda M + \mu N) I_n \\ &= \lambda M + \mu N + (\lambda \mathrm{Tr}(M) + \mu \mathrm{Tr}(N)) I_n && \text{par linéarité de la trace} \\ &= \lambda (M + \mathrm{Tr}(M) I_n) + \mu (M + \mathrm{Tr}(N) I_n) \\ &= \lambda f(M) + \mu f(N). \end{aligned}$$

Donc f est bien linéaire et les espaces de départ et d'arrivée coïncident. Conclusion,

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. Soit $M \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Par définition,
$$f(M) = O_n \quad \Leftrightarrow \quad M + \mathrm{Tr}\,(M)\, I_n = O_n \quad \Leftrightarrow \quad M = -\mathrm{Tr}\,(M)\, I_n.$$
En particulier,
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(M) &= \mathrm{Tr}(\underbrace{-\mathrm{Tr}\,(M)}_{\in\mathbb{R}} I_n) = -\mathrm{Tr}\,(M)\,\mathrm{Tr}\,(I_n) && \text{par linéarité de la trace}\\ &= -n\mathrm{Tr}\,(M)\end{aligned}$$
D'où
$$(n+1)\,\mathrm{Tr}\,(M) = 0_{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{Tr}\,(M) = 0_{\mathbb{R}}.}$$

3. Soit $M \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Par la question précédente, $\mathrm{Tr}\,(M) = 0_{\mathbb{R}}$. Or nous avions par définition, $M + \mathrm{Tr}\,(M)\, I_n = O_n$. Ainsi,
$$M + O_n = O_n \quad \Leftrightarrow \quad M = O_n.$$
Donc $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \{O_n\}$. Or l'inclusion réciproque est aussi vraie car $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n\,(\mathbb{R})$. Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \{O_n\}\,.}$$

4. Par la question précédente, on en déduit directement que
$$\boxed{\text{l'endomorphisme } f \text{ est injectif.}}$$
Or f est un endomorphisme en dimension finie. Donc
$$\boxed{\text{l'application } f \text{ est un automorphisme de } \mathscr{M}_n\,(\mathbb{R}) \text{ donc notamment un isomorphisme.}}$$

5. Directement par la question précédente, puisque f est bijectif, il est notamment surjectif :
$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) = \mathscr{M}_n\,(\mathbb{R})\,.}$$

6. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_n\,(\mathbb{R})$. On a
$$\begin{aligned}f^2(M) = f \circ f(M) = f(M + \mathrm{Tr}\,(M)\, I_n) &= f(M) + \mathrm{Tr}\,(M)\, f(I_n) && \text{par linéarité de } f\\ &= M + \mathrm{Tr}\,(M)\, I_n + \mathrm{Tr}\,(M)\,(I_n + \mathrm{Tr}\,(I_n)\, I_n)\\ &= M + (n+2)\,\mathrm{Tr}\,(M)\, I_n.\end{aligned}$$
Dès lors,
$$\begin{aligned}&\left(f^2 - (n+2)\, f + (n+1)\,\mathrm{Id}_E\right)(M)\\ &\quad= f^2(M) - (n+2)\, f(M) + (n+1)\, M\\ &\quad= M + (n+2)\,\mathrm{Tr}\,(M)\, I_n - (n+2)\, M - (n+2)\,\mathrm{Tr}\,(M)\, I_n + (n+1)\, M\\ &\quad= O_n.\end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout $M \in E$, on conclut que
$$\boxed{f^2 - (n+2)\, f + (n+1)\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

(b) Par la question précédente, on a
$$\begin{aligned}f^2 - (n+2)\, f + (n+1)\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad &\Leftrightarrow \quad f \circ (f - (n+2)\,\mathrm{Id}_E) = -(n+1)\,\mathrm{Id}_E\\ &\Leftrightarrow \quad f \circ \left(\frac{n+2}{n+1}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{n+1} f\right) = \mathrm{Id}_E\end{aligned}$$
On retrouve que f est bijective et de plus,
$$\boxed{f^{-1} = \frac{n+2}{n+1}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{n+1} f.}$$

Partie 2 : La dimension quatre, c'est facile à abattre

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$.

7. La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$$\boxed{\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)}$$

et

$$\boxed{f(\mathscr{B}) = \left(\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right).}$$

8. On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) &= \left\{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{22} = 0\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}-a_{22} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ avec } (a_{22}, a_{12}, a_{21}) \in \mathbb{R}^3\right\}\\
&= \left\{a_{22}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \text{ avec } (a_{22}, a_{12}, a_{21}) \in \mathbb{R}^3\right\}\\
\text{d'où : } \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_0 = (-E_{11} + E_{22}, E_{12}, E_{21})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. Montrons qu'elle est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a(-E_{11} + E_{22}) + bE_{12} + cE_{21} = O_2.$$

Alors, $\begin{bmatrix}-a & b\\c & a\end{bmatrix} = O_2$ et donc $a = b = c = 0$. Donc $\mathscr{B}_0$ est libre. D'où

$$\boxed{\mathscr{B}_0 = (-E_{11} + E_{22}, E_{12}, E_{21}) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}).}$$

Conclusion :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_0) = 3.}$$

9. La famille (I_2) est libre (car constituée d'un seul vecteur non nul) et est génératrice de $\mathrm{Vect}(I_2)$, donc est une base de $\mathrm{Vect}(I_2)$. Montrons que $\mathscr{B}_1 = (\mathscr{B}_0, I_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathscr{B}_1) &= \mathrm{rg}(-E_{11} + E_{22}, E_{12}, E_{21}, I_2)\\
&= \mathrm{rg}(E_{22}, E_{12}, E_{21}, I_2) && C_1 \leftarrow \frac{1}{2}(C_1 + C_4)\\
&= \mathrm{rg}(E_{22}, E_{12}, E_{21}, E_{11}) && C_4 \leftarrow C_4 - C_1\\
&= 4 && \text{car on reconnait la base canonique de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{rg}(\mathscr{B}_1) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_1)$ donc $\mathscr{B}_1$ est libre. De plus $\mathrm{rg}(\mathscr{B}_1) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ donc $\mathscr{B}_1$ est génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi (I_2) est une base de $\mathrm{Vect}(I_2)$, $\mathscr{B}_0$ est une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathscr{B}_1 = (\mathscr{B}_0, I_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_2) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

10. Posons $\mathscr{B}' = (\mathscr{B}_0, I_2)$.

    Vérifions que $\mathscr{B}' = (\mathscr{B}_0, I_2)$ convient i.e. $\begin{cases} \mathscr{B}' \text{ est une base de } E & (i) \\ \forall u \in \mathscr{B}',\ f(u) \text{ et } u \text{ sont colinéaires} & (ii) \end{cases}$

    (i) Par la question précédente.

    $\boxed{(ii)}$ Soit $M \in \mathscr{B}'$. Montrons que $f(M)$ et M sont colinéaires.
    Comme $M \in \mathscr{B}' = (\mathscr{B}_0, I_2)$, il vient que :

$$\begin{bmatrix} M \in \mathscr{B}_0) \\ \text{OU} \\ M = I_2 \end{bmatrix} \quad \text{d'où :} \quad \begin{bmatrix} f(M) \underset{\mathrm{Tr}(M)=0_{\mathbb{R}}}{=} M \\ \text{OU} \\ f(I_2) = I_2 + \mathrm{Tr}\,(I_2)\, I_2 = 3\mathcal{I}_2 \end{bmatrix}$$

    Dans tous les cas, $f(M)$ et M sont colinéaires. Conclusion,

$$\boxed{\exists \mathscr{B}' \text{ base de } E \text{ telle que, } \forall M \in \mathscr{B}',\ f(M) \text{ et } M \text{ sont colinéaires.}}$$

Partie 3 : Mais la dimension n, c'est pas pour les hyènes

Dans cette partie, n désigne à nouveau un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque.

11. Montrons que $\mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{O_n\}$.

    $\supset$ Une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient le vecteur nul.

    $\subset$ Soit $A \in \mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. Alors $\begin{cases} A \in \mathrm{Vect}(I_n) \\ A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid A = \lambda I_n \\ \mathrm{Tr}(A) = 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$.
    Montrons que $A = O_n$.
    On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A) = 0_{\mathbb{R}} &\iff \mathrm{Tr}(\lambda I_n) = 0_{\mathbb{R}} && \text{car } A = \lambda I_n \\ &\iff \lambda \mathrm{Tr}(I_n) = 0_{\mathbb{R}} && \text{par linéarité de la trace} \\ &\iff \lambda n = 0_{\mathbb{R}} && \text{car } \mathrm{Tr}(I_n) = n \\ &\iff \lambda = 0_{\mathbb{R}} && \text{car } n \neq 0 \end{aligned}$$

    Donc $A = \lambda I_n = O_n$ et donc $\mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \subset \{O_n\}$.

    Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{\mathcal{O}_n\}.}$$

12. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ et $B = \mathrm{Vect}\,(I_n)$ telles que $M = A + B$. Puisque $B \in \mathrm{Vect}\,(I_n)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda\, I_n$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(M) = \mathrm{Tr}\,(A+B) = \mathrm{Tr}\,(A + \lambda\, I_n) &= \mathrm{Tr}\,(A) + \lambda\, \mathrm{Tr}\,(I_n) && \text{par linéarité de la trace} \\ &= \lambda\, n && \text{car } A \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}). \end{aligned}$$

    Ainsi, $\lambda = \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n}$ car $n \geqslant 1$. D'où

$$\boxed{B = \lambda\, I_n = \frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} I_n \qquad \text{puis} \qquad A = M - B = M - \frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} I_n.}$$

13. Nous venons de redémontrer par une analyse que la décomposition d'une matrice M comme un élément de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ plus un élément de $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ est unique et que donc ces deux espaces sont en somme directe. Procédons à la synthèse. Soit $M \in E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $M \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}) + \mathrm{Vect}\,(I_n)$. Posons

$$B = \frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} I_n \qquad \text{et} \qquad A = M - \frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} I_n.$$

    Dès lors,

- on a
$$A + B = \frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} I_n + M - \frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} I_n = M.$$
- De plus,
$$B = \underbrace{\frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n}}_{\in \mathbb{R}} I_n \in \mathrm{Vect}\,(I_n)\,.$$
- Enfin,
$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\left(M - \frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} I_n\right) &= \mathrm{Tr}\,(M) - \frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} \mathrm{Tr}\,(I_n) && \text{par linéarité de la trace} \\ &= \mathrm{Tr}\,(M) - \frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} n = 0_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

  Donc $A \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$.

Finalement, on obtient que
$$M = A + B \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}) + \mathrm{Vect}\,(I_n)\,.$$
Ceci étant vrai pour toute matrice $M \in E$. On en déduit que $E \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}) + \mathrm{Vect}\,(I_n)$. Or on a aussi $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}) + \mathrm{Vect}\,(I_n) \subset E$. Donc
$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}) + \mathrm{Vect}\,(I_n) = E.$$
De plus par la question 11. les deux espaces sont en somme directe. Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}\,(I_n) = E.}$$

14. Par la question précédente,
$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})\right) + \dim\left(\mathrm{Vect}\,(I_n)\right) = \dim\,(E) = n^2.$$
Or (I_n) est libre car formée d'une seule matrice non nulle et engendre $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ donc (I_n) est une base de $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ qui est donc une droite vectorielle :
$$\dim\left(\mathrm{Vect}\,(I_n)\right) = 1.$$
Finalement,
$$\boxed{\dim\left(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})\right) = n^2 - \dim\left(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})\right) = n^2 - 1.}$$

15. Par les questions précédentes, nous avons vu que la décomposition de toute matrice $M \in E$ est donnée par
$$\forall M \in E, \qquad M = \underbrace{M - \frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} I_n}_{\in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})} + \underbrace{\frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} I_n}_{\in \mathrm{Vect}(I_n)}.$$
Ainsi, on en déduit que la projection sur $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ est donnée par
$$\boxed{p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n. \end{array}}$$
De même plus la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ est donnée par $s = \mathrm{Id}_E + 2\,(p - \mathrm{Id}_E) = 2p - \mathrm{Id}_E$ et donc
$$\boxed{s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & 2\frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n - M. \end{array}}$$

16. Montrons que :

$$(i)\ \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \qquad \text{et} \qquad (ii)\ \mathrm{Ker}(f-(n+1)\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(\mathcal{I}_n)$$

(i) On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) &= \{\, M\in E \mid (f-\mathrm{Id}_E)(M)=0_E \,\}\\ &= \{\, M\in E \mid f(M)-M=0_E \,\}\\ &= \{\, M\in E \mid \mathrm{Tr}(M)\mathcal{I}_n=0_E \,\}\\ &= \{\, M\in E \mid \mathrm{Tr}(M)=0_{\mathbb{R}} \,\} \qquad \text{car } \mathcal{I}_n\neq 0_E\\ &= \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})\,.\end{aligned}$$

(ii) Montrons que par double inclusion que $\mathrm{Ker}(f-(n+1)\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(I_n)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $M\in\mathrm{Ker}(f-(n+1)\mathrm{Id}_E)$. Alors $(f-(n+1)\mathrm{Id}_E)(M)=O_n$ i.e. $f(M)=(n+1)M$.
Montrons que $M\in\mathrm{Vect}(I_n)$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(M)=(n+1)M \quad &\Leftrightarrow \quad M+\mathrm{Tr}(M)I_n=(n+1)M\\ &\Leftrightarrow \quad M=\underbrace{\frac{\mathrm{Tr}(M)}{n}}_{=\lambda\in\mathbb{R}}I_n\in\mathrm{Vect}(I_n)\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f-(n+1)\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Vect}(I_n)$.

$\supset$ Soit $M\in\mathrm{Vect}(I_n)$. Alors $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ M=\lambda I_n$.
Montrons que $M\in\mathrm{Ker}(f-(n+1)\mathrm{Id}_E)$ i.e. $f(M)=(n+1)M$.
On a les égalités matricielles suivantes :

$$f(M)=f(\lambda I_n)=\lambda I_n+\mathrm{Tr}(\lambda I_n)I_n=(1+n)(\lambda I_n)=(n+1)M$$

D'où $\mathrm{Vect}(I_n)\subset\mathrm{Ker}(f-(n+1)\mathrm{Id}_E)$.

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(f-(n+1)\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(I_n).}$$

17. Montrons que $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Vect}\,(I_n)$. Soit $M\in\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E)$. Alors, il existe $N\in E$ tel que

$$M=(f-\mathrm{Id}_E)\,(N)=f(N)-N=N+\mathrm{Tr}\,(N)\,I_n-N=\underbrace{\mathrm{Tr}\,(N)}_{\in\mathbb{R}}I_n\in\mathrm{Vect}\,(I_n)\,.$$

Donc $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Vect}\,(I_n)$.

Montrons que $\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$. Soit $M\in\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)$. Alors, il existe $N\in E$ tel que

$$M=(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)\,(N)=f(N)-(n+1)\,N=N+\mathrm{Tr}\,(N)\,I_n-(n+1)\,N=\mathrm{Tr}\,(N)\,I_n-nN.$$

Par la linéarité de la trace, on en déduit que

$$\mathrm{Tr}\,(M)=\mathrm{Tr}\,(\mathrm{Tr}\,(N)\,I_n-nN)=\mathrm{Tr}\,(N)\,\mathrm{Tr}\,(I_n)-n\mathrm{Tr}\,(N)=0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $M\in\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$. Ceci étant vrai pour tout $M\in\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)$, on en déduit que

$$\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Vect}\,(I_n) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})\,.}$$

18. Par le théorème du rang, on a

$$\dim\left(\operatorname{Im}\left(f-\operatorname{Id}_E\right)\right)=\operatorname{rg}\left(f-\operatorname{Id}_E\right)=\dim\left(E\right)-\dim\left(\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{Id}_E\right)\right).$$

Donc par la question 16.,

$$\dim\left(\operatorname{Im}\left(f-\operatorname{Id}_E\right)\right)=\dim\left(E\right)-\dim\left(\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Tr}\right)\right).$$

Or par la question 14., $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Tr}\right)\right)=n^2-1$. Ainsi,

$$\dim\left(\operatorname{Im}\left(f-\operatorname{Id}_E\right)\right)=n^2-\left(n^2-1\right)=1=\dim\left(\operatorname{Vect}\left(I_n\right)\right).$$

Or par la question précédente, $\operatorname{Im}\left(f-\operatorname{Id}_E\right)\subset\operatorname{Vect}\left(I_n\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}\left(f-\operatorname{Id}_E\right)=\operatorname{Vect}\left(I_n\right).}$$

De même, par le théorème du rang,

$$\dim\left(\operatorname{Im}\left(f-(n+1)\operatorname{Id}_E\right)\right)=\operatorname{rg}\left(f-(n+1)\operatorname{Id}_E\right)=\dim\left(E\right)-\dim\left(\operatorname{Ker}\left(f-(n+1)\operatorname{Id}_E\right)\right).$$

Donc par la question 16.,

$$\dim\left(\operatorname{Im}\left(f-(n+1)\operatorname{Id}_E\right)\right)=\dim\left(E\right)-\dim\left(\operatorname{Vect}\left(I_n\right)\right)=n^2-1.$$

Or par la question 14., $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Tr}\right)\right)=n^2-1$. Ainsi,

$$\dim\left(\operatorname{Im}\left(f-(n+1)\operatorname{Id}_E\right)\right)=\dim\left(\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Tr}\right)\right).$$

Et puisque par la question précédente, $\operatorname{Im}\left(f-(n+1)\operatorname{Id}_E\right)\subset\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Tr}\right)$, on en conclut également que

$$\boxed{\operatorname{Im}\left(f-(n+1)\operatorname{Id}_E\right)=\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Tr}\right).}$$

« La dimension c'est béton, le théorème du rang c'est puissant. »