Devoir de Révision PTSI
d'après Banque PT - Maths C - 2024

Les parties en bleu avec astérisque ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Préambule

1. Rappeler, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction *cosinus*, l'autre la fonction *tangente*) de la dérivée de la fonction
$$x \mapsto \tan(x).$$

2. (a) Montrer que la fonction g qui, à tout réel x de $]0;\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, associe $g(x)=\frac{1}{\tan(x)}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0;\pi[$. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0;\pi[$.

   (b) En déduire une primitive sur $]0;\pi[$ de la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

3. On considère les fonctions
$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

   (a) Expliciter les domaines de définitions respectifs $\mathcal{D}_{f_1}\subset\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2}\subset\mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2.

   (b) Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera.

   (c) Donner les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2.

   (d) Donner, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1, l'expression de $f_1'(x)$.

   (e) Montrer que, en tout réel x de dérivabilité de la fonction f_2,
$$f_2'(x)=\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$
   et en déduire une expression simplifiée de $f_2'(x)$.

   (f) Etudier les variations des fonctions f_1 et f_2. On donnera leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.
   Donner, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

   (g) Tracer, sur un même graphe (échelle : 1 cm pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1}\cap[-2\pi;2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2}\cap[-2\pi;2\pi]$.

4. On considère la fonction
$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

   (a) Expliciter le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_3}\subset\mathbb{R}$ de la fonction f_3. Quel est le domaine de dérivabilité de f_3 ?

   (b) Etudier les variations de la fonction f_3 sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. On donnera son tableau de variations, en précisant les limites aux bords.

Partie I

On aura besoin dans cette partie du résultat suivant que l'on pourra admettre : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

Alors, la série dite *alternée* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x_n$ converge de plus,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n x_n \right| \leqslant x_{n+1}.$$

1. (a) Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction logarithme népérien ln.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Exprimer, en fonction de ε :

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (c) * En déduire si $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ existe ou non.

2. * Déterminer un équivalent simple en 0^+ de la fonction $x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

3. (a) * Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction arctangente (arctan). On note $(a_k)_{k\in[\![0;2n+1]\!]}$ les coefficients de ce développement limité :

$$\arctan(x) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k + o\left(x^{2n+1}\right).$$

   (b) * Déterminer suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

4. * On admet que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \frac{\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x.$$

   Exprimer alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x$ en fonction de la somme d'une série, et sans le signe intégral.

5. On pose :

$$\mathcal{C} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

   (a) Montrer, à l'aide du changement de variable $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = u$, que :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = -2\mathcal{C}.$$

   (b) Justifier que $\frac{8}{9}$ est une valeur approchée de $\mathcal{C}$ (on donnera la précision).

(c) Pour tout entier naturel non nul N, on pose :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Soit p un entier strictement plus grand que 2. Donner la valeur d'un entier naturel non nul N à partir de laquelle S_N est une valeur approchée de $\mathcal{C}$ à 10^{-2p} près.

Partie II

On considère l'équation différentielle sur $]0;\pi[$:

$$y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad (\mathcal{E})$$

1. On introduit la fonction f_4 qui, à tout réel x de $]0;\pi[$, associe :

$$f_4(x) = \sin(x) \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Montrer que, pour tout réel x de $]0;\pi[$:

$$f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

2. Résoudre l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

3. Montrer que les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$ sont de la forme :

$$y = y_0 + f_4$$

où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

4. Dans cette question, on souhaite retrouver de façon différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$ de la forme :

$$x \mapsto y(x) = z(x)\sin(x)$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0;\pi[$.

(a) Montrer que si y est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$, alors z' est solution sur $]0;\pi[$ d'une équation différentielle de premier ordre, notée $(\mathcal{E}')$.

(b) Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$, puis appliquer la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de $(\mathcal{E}')$. Donner alors, pour tout réel x de $]0;\pi[$, l'expression de $z'(x)$ en fonction de x.

(c) A l'aide du Préambule, exprimer, pour tout réel x de $]0;\pi[$, $z(x)$ en fonction de x.

(d) Montrer que l'on retrouve bien l'expression des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$ obtenues plus haut.

Partie III

On introduit les fonctions G et H, définies respectivement sur les domaines $\mathcal{D}_G \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_H \subset \mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_G : \quad G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} \, \mathrm{d}\theta$$
$$\forall x \in \mathcal{D}_H : \quad H(x) = \int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

1. Expliciter, en le justifiant avec soin, $\mathcal{D}_G$.
2. (a) * Soit $g : u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}$. Montrer que g est 1-lipschitzienne.
   (b) En déduire la continuité de la fonction G.
3. Montrer que
$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0.$$
4. * On admet que G est dérivable sur $\mathcal{D}_G$ et que
$$\forall x \in \mathcal{D}_G, \quad G'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2(\theta)} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} \, \mathrm{d}\theta \,.$$
5. (a) Expliciter $\mathcal{D}_H$.
   (b) Montrer que la fonction H est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_H$. On explicitera la dérivée de H.
6. A l'aide du changement de variable $u = x\tan(\theta)$, montrer que, en tout réel x de son domaine de dérivabilité,
$$G'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2} H(x).$$
(On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$).
7. Montrer que la fonction $H^2 + G$ est constante, en précisant la valeur de cette constante.
8. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$, ainsi qu'une expression simplifiée de $\lim A \to +\infty \displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-xt^2} \, \mathrm{d}t$, pour tout réel $x > 0$.

Partie IV

1. * Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler le développement limité en 0 de la fonction sinus à l'ordre $2n+1$.
2. On considère la fonction φ, telle que
$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
* Montrer que φ admet un développement limité à l'ordre $2n$ en 0 que l'on précisera.
3. Dans cette question, N désigne un entier strictement positif, et x est un réel quelconque. On introduit le polynôme P_N tel que :
$$P_N(X) = \left(1 - \frac{X}{\pi}\right)\left(1 + \frac{X}{\pi}\right)\left(1 - \frac{X}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{X}{2\pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{X}{N\pi}\right)\left(1 + \frac{X}{N\pi}\right).$$
Quel est le coefficient, noté α_N, de X^2 dans $P_N(X)$?

4. On désigne par α le coefficient de x^2 dans le développement limité en 0 de φ, et on suppose que :

$$\lim_{N \to +\infty} \alpha_N = \alpha.$$

En déduire, grâce au développement limité en 0 de φ, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

5. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

ainsi que celle de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

6. On pose :

$$\mathcal{D} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^2}.$$

Que vaut $2\mathcal{D} - \mathcal{C}$? ($\mathcal{C}$ est la constante introduite dans la Partie I)

7. On donne :

$$\frac{\pi^2}{8} = 1,2337 \pm 10^{-4}.$$

Donner une valeur approchée de $\mathcal{D}$.

Dans ce problème, les propriétés de fonctions trigonométriques permettent d'exprimer des sommes de séries classiques - comme $\mathcal{C} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, où $\mathcal{C}$ est la constante de Catalan - ou encore, la très classique intégrale de Gauss, dont la valeur est déterminée ici à l'aide d'intégrales à paramètres.

Fin de l'épreuve