Epreuve de mathématiques 1
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Logique

On pose $\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $\mathrm{Id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$.

Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les assertions suivantes :

$$\begin{array}{lll} A(f) & : & « \ \forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \circ g = g \circ f \ » \\ B(f) & : & « \ f \circ \tau = \tau \circ f \ » \\ C(f) & : & « \ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = a + n \ » \\ D(f) & : & « \ f = \mathrm{Id} \ » \end{array}$$

On fixe $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Préciser $B(f)$ uniquement à l'aide de f, d'un quantificateur et d'une variable x.
2. Donner la négation de $C(f)$.
3. Soit $I(f) : (B(f) \ \Rightarrow \ C(f))$.
   Enoncer la réciproque, la négation et la contraposée de $I(f)$.
   On détaillera les assertions utilisées.
4. Montrer que $I(f)$ est vraie.
5. La contraposée de $I(f)$ est-elle vraie ? Justifier.
6. Soit f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0;1[\\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que la réciproque de $I(f_0)$ est fausse.
7. Donner une implication reliant $A(f)$ et $B(f)$.

On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant $A(f)$.

8. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \neq \mathrm{Id}$. Montrer alors qu'il existe $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction constante que l'on choisira avec soin telle que $f \circ g \neq g \circ f$.
9. Quelle implication peut-on déduire de la question précédente ?
10. Conclure que $A(f) \ \Leftrightarrow \ D(f)$.

Problème 2 - Fonctions réelles

On considère la fonction

$$f : \quad x \mapsto x \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2}.$$

Partie 1 : Généralité

1. Exprimer $f(14)$ en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et de nombres entiers.
2. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f.
3. Montrer que la fonction f est paire. Préciser alors une réduction du domaine d'étude de f.

Partie 2 : Etude aux bornes

4. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 2 \\ x>2}} f(x)$.
5. Montrer que pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f(x) \geqslant \frac{x}{4}$.
6. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
8. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction $h : u \mapsto \ln(1+u)$.
9. Calculer la dérivée de la fonction h en 0.
10. En déduire que $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$.
11. Vérifier que pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f(x) = x\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.
12. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{9}{2}$.
13. En déduire le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
14. En déduire sans calcul le comportement asymptotique de f en $-\infty$.

Partie 3 : Etude de la dérivée

15. Justifier que f est dérivable sur $]2;+\infty[$.
16. Montrer que pour tout $x \in]2;+\infty[$
$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{1}{4}.$$
17. Déterminer le comportement asymptotique de f' en $+\infty$.
18. Vérifier également que pour tout $x \in]2;+\infty[$,
$$f'(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$
19. En posant $u = \frac{1}{x-2}$, calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \left(-\ln(x-2) - \dfrac{2}{x-2}\right)$.
20. En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f'(x)$.
21. Calculer pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f''(x)$.
22. Calculer pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f^{(3)}(x)$.
23. Déterminer le tableau de variation complet de f' sur $]2;+\infty[$.
24. La fonction f' est-elle majorée ? minorée ? bornée sur $]2;+\infty[$?
25. Justifier qu'il existe un **unique** $\alpha \in]2;+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
26. On pose $\beta = f(\alpha)$.
    (a) Montrer que $\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right) = \frac{4\alpha}{\alpha^2-4} - \frac{1}{4}$.
    (b) En déduire que $\beta = \frac{4\alpha^2}{\alpha^2-4} + \frac{1}{2}$.

Partie 4 : Conclusion

27. Donner le tableau de variation complet de f sur $\mathcal{D}$.
28. Justifier que le graphe de f admet une tangente au point $x = 14$ et déterminer l'équation de cette tangente.

Problème 3 - Bijection

Partie 1 : Etude de h

On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1. Déterminer U le domaine de définition de h.
2. Déterminer la parité de h.
3. Déterminer U' le domaine de dérivabilité de h.
4. Montrer que pour tout $x \in U'$,
$$h'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$
5. Préciser le comportement asymptotique de h en $+\infty$.
6. Dresser le tableau de variations complet de h.

Partie 2 : Etude de H

On pose $V =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et pour tout $x \in V$, $H(x) = h(x)^2$.

7. Vérifier que $\forall x \in V$, $H(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
8. Dresser le tableau de variations complet de H sur V.
9. Déterminer $H([1; 2])$ et $H(]-\infty; 2[)$.
10. Déterminer $H^{\leftarrow}\left(\left[0; \frac{1}{2}\right]\right)$.

Partie 3 : Etude de f

On considère désormais la fonction $f = \ln(h) : x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$.

11. Déterminer I le domaine de définition de f.
12. Justifier que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
13. Justifier que f est dérivable sur I et démontrer que pour tout $x \in I$,
$$f'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}.$$
14. Déterminer le tableau de variation complet de f sur I.
15. Démontrer que f définit une bijection de I dans un intervalle J à préciser. On note $g = f^{-1}$.
16. Calculer g.

Partie 4 : Calcul de g par une équation différentielle

On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente. On ne pourra donc pas utiliser dans toute la suite le résultat de la question 16.

17. **Sans calculer** g, démontrer que g est dérivable sur J.
18. Toujours sans calculer g, montrer que g vérifie l'équation différentielle :

$$\forall y \in J, \quad g'(y) = g(y)\left(g(y)^2 - 1\right).$$

On pose pour tout $y \in J$, $\varphi(y) = \frac{1}{g(y)^2}$.

19. Préciser $g\,(J)$. En déduire que φ est bien définie et dérivable sur J.
20. Exprimer pour tout $y \in J$, $g(y)$ et $g'(y)$ en fonction de $\varphi(y)$ et $\varphi'(y)$.
21. En déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on précisera tel que

$$\forall y \in J, \quad \varphi'(y) + a\,\varphi(y) = b \qquad (\bigstar)$$

22. Vérifier que pour tout $A \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_A : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 1 + A\,\mathrm{e}^{2y} \end{array}$ est une solution de $(\bigstar)$.
23. On admet qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \varphi_A$ sur J. En déduire g en fonction de A.
24. Déterminer la valeur de A et retrouver alors le résultat de la question 16.