DS10 - CCB Mardi 13 mai 2025

Epreuve de Mathématiques

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. **Les questions non correctement référencées ne seront pas notées**. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Les questions marquées d'un * ont été modifiées ou ajoutées par rapport au sujet initial

Tournez la page S.V.P

Problème 1 - Probabilités

On lance à plusieurs reprises une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$. Les lancers sont supposés indépendant. On souhaite compter le nombre de changements de face obtenus lors de $n \in \mathbb{N}^*$ lancers. On fixe $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel toutes les variables aléatoires de ce problème sont supposées définies. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- X_n la variable aléatoire retournant 1 si la pièce donne pile au lancer numéro n et 0 si la pièce donne face à ce lancer.
- S_n la variable aléatoire retournant le nombre de changements de face obtenus durant les n premiers lancers.

Par exemple si la pièce a donné *pile* - *face* - *face* - *pile* alors $S_2 = 1$, $S_3 = 1$, $S_4 = 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Partie 1 : Généralités et premiers lancers

1. Quelle est la loi de X_n ?
2. Quelle est la loi de $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$? Préciser $\mathbb{P}(T_n = 2)$.
3. Déterminer l'univers image de S_n.
4. (a) Calculer $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$.
   (b) En déduire la loi de S_2.
5. (a) Exprimer $(S_3 = 1)$ en fonction des $(X_i = 0)$ et $(X_i = 1)$, $i \in [\![1;3]\!]$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(S_3 = 1)$.
   (c) Déterminer la loi de S_3.
6. Calculer $\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid X_1 = 1)$.
7. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid S_3 = 1)$.

Partie 2 : Au lancer n

8. (a) Préciser $(S_n = 0)$ en fonctions des $(X_k = 0)$ et $(X_k = 1)$, $k \in [\![1;n]\!]$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(S_n = 0)$.
9. Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0, X_n = 0)$.
10. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p pour que $(S_n = 0)$ et $(X_n = 0)$ soient indépendants.
11. Expliquer par une phrase pourquoi, pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $(S_n = k, X_n = 0)$ est indépendant de $(X_{n+1} = 0)$.
12. Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,
$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) = (1-p)\,\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 0)\,.$$
13. Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,
$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0) = (1-p)\,\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 0) + (1-p)\,\mathbb{P}(S_n = k-1, X_n = 1)$$
$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = p\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 1) + p\mathbb{P}(S_n = k-1, X_n = 0)\,.$$
14. Déterminer pour tout $(i,j) \in \{0;1\}^2$, $\mathbb{P}(S_2 = i, X_2 = j)$.
15. A l'aide des deux questions précédentes, retrouver la valeur $\mathbb{P}(S_3 = 1)$.

Partie 3 : Cas de la pièce équilibrée

On suppose dans toute la suite que $p = 1/2$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) t^k,$$

appelée la fonction génératrice de S_n.

16. Déterminer $G_n(0)$ et $G_n(1)$.
17. Préciser pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_2(t)$.
18. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, exprimer $\mathbb{P}\left(S_{n+1} = k\right)$ en fonction de $\mathbb{P}\left(S_n = k\right)$ et $\mathbb{P}\left(S_n = k-1\right)$.
19. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$G_{n+1}(t) = \frac{1+t}{2} G_n(t).$$
20. En déduire une expression de $G_n(t)$ en fonction de n et de t.
21. En déduire pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $\mathbb{P}\left(S_n = k\right)$.
22. Vérifier la cohérence avec les questions 8.b et 5.b

Problème 2 - Algèbre (d'après banque PT 2022)

Les questions avec un astérisque ont été modifiées par rapport au sujet initial.
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note M^T sa transposée et $\operatorname{Tr}(M)$ sa trace. Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dit stable par produit si pour toutes matrices M et N de F, le produit MN appartient à F. Soient a, b et c trois réels. On note $M(a,b,c)$ la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ et $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M(a,b,c)$. E désigne l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes $f_{a,b,c}$ lorsque (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$. Enfin on note $I = M(1,0,0)$, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

Partie 1 : Questions de cours

1. Soit n un entier naturel non nul. Donner la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. A quelle condition la série géométrique $\sum z^n$ converge-t-elle ? Préciser alors la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Partie 2 : Un supplémentaire orthogonal

3. Démontrer que E est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.
4. Donner une base d'un supplémentaire de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère la fonction φ définie sur $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ par :

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2,\ \varphi(M,N) = \operatorname{Tr}\left(M^T N\right).$$

5. * Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que l'application $\varphi_1 : M \mapsto \varphi(M,N)$ est linéaire.
6. * Vérifier que $\varphi(I, J+K) = 0$.
7. * Calculer $H = 2\left(\varphi(K,I)\frac{I}{\varphi(I,I)} + \varphi(K,J+K)\frac{J+K}{\varphi(J+K,J+K)}\right)$.
8. * Montrer que $\mathscr{B} = (I,J,H)$ est une base de E.
9. * On pose $E^\perp = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \varphi(I,M) = \varphi(J,M) = \varphi(H,M) = 0\}$. Démontrer que $E^\perp$ est une droite vectorielle.
10. * Montrer que $E^\perp$ est un supplémentaire de E.
11. * Montrer que pour tout $(M,N) \in E^\perp \times E$, $\varphi(M,N) = 0$.

Soit p un projecteur appartenant à $\mathcal{E}$ distinct de l'identité et de l'application nulle. Il existe donc deux droites vectorielles distinctes $D_1 = \operatorname{Vect}(e_1)$ et $D_2 = \operatorname{Vect}(e_2)$, avec (e_1,e_2) une base de $\mathbb{R}^2$, telles que p soit la symétrie sur D_1 parallèlement à D_2.

12. * Ecrire A la matrice de p dans la base (e_1,e_2) et calculer la trace de A.
13. * Soit B la matrice de p dans une autre base. Montrer que $\operatorname{Tr}(B) = \operatorname{Tr}(A)$.
14. En déduire quelles sont les matrices $M(a,b,c)$ pour lesquelles $f_{a,b,c}$ est un projecteur (distinct de l'identité et de l'application nulle).

Partie 3 : Espaces stables par produit

15. Le produit de deux matrices de E est-il toujours une matrice de E ?
16. L'objectif de cette question est de déterminer les droites vectorielles Δ de E qui sont stables par produit. Soit Δ une droite vectorielle engendrée par $M_0 = M(a_0,b_0,c_0)$.
    (a) Démontrer que Δ est stable par produit si et seulement si $M_0^2 \in \Delta$.
    (b) On suppose que $M_0^2 \in \Delta$.
        i. Justifier qu'il existe un réel λ tel que $M_0^2 = \lambda M_0$.
        ii. Démontrer que si $\lambda = 0$, alors M_0 est proportionnelle à J ou K.
        iii. On suppose que $\lambda \neq 0$. On pose $M_0' = \frac{1}{\lambda}M_0$. Démontrer que M_0' est la matrice canoniquement associée à un projecteur.
    (c) Conclure.
17. L'objectif de cette question est de déterminer les plans vectoriels de E stables par produit.
    (a) Vérifier que le plan vectoriel engendré par I et J est stable par produit.
    (b) Le plan vectoriel engendré par J et K est-il stable par produit ?
    (c) Vérifier que l'ensemble des matrices symétriques de E est un plan vectoriel stable par produit.
    (d) Soit $(b,c) \neq (0,0)$. Démontrer que le sous-espace vectoriel engendré par I et $bJ + cK$ est stable par produit.
    (e) Démontrer que les seuls plans vectoriels de E stables par produit sont ceux de la question précédente.