Corrigé du DS10 - Concours blanc probabilités, algèbre

Problème I - Probabilités

On lance à plusieurs reprises une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$. Les lancers sont supposés indépendant. On souhaite compter le nombre de changements de face obtenus lors de $n \in \mathbb{N}^*$ lancers. On fixe $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel toutes les variables aléatoires de ce problème sont supposées définies. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- X_n la variable aléatoire retournant 1 si la pièce donne pile au lancer numéro n et 0 si la pièce donne face à ce lancer.
- S_n la variable aléatoire retournant le nombre de changements de face obtenus durant les n premiers lancers.

Par exemple si la pièce a donné *pile* - *face* - *face* - *pile* alors $S_2 = 1$, $S_3 = 1$, $S_4 = 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Partie 1 : Généralités et premiers lancers

1. Donnons la loi de X_n. Par définition, on a $X_n(\Omega) = \{0;1\}$ donc X_n suit une loi de Bernoulli. Son paramètre est donné d'après l'énoncé par
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p.$$
Conclusion,
$$\boxed{X_n \sim \mathscr{B}(p)\,.}$$

2. Déterminons la loi de $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et précisons $\mathbb{P}(T_n = 2)$. Par hypothèse les X_k sont
   - indépendants,
   - de loi de Bernoulli,
   - de même paramètre p.

   Par conséquent, T_n suit une loi binomiale de paramètre n et p :
$$\boxed{T_n \sim \mathscr{B}(n,p)\,.}$$
On en déduit directement que
$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}(1-p)^{n-2}\,.}$$

3. Déterminons l'univers image de S_n. On lance la pièce n fois, il y a donc un premier lancer puis $n-1$ lancer pendant lesquels, pour chaque lancer il est possible d'avoir un ou aucun changement. Si on a aucun changement, $S_n = 0$ et si on a des changements à chaque lancer, $S_n = n-1$. Il est aussi possible d'avoir toutes les valeurs entre ces deux extremums. Conclusion,
$$\boxed{S_n(\Omega) = [\![0; n-1]\!].}$$

4. (a) Calculons $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$. Puisque $X_1 \sim \mathscr{B}(p)$, la famille $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ forme un système complet d'évènements (incompatibles). Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \neq X_2) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \mid X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)\\
&= \mathbb{P}(0 \neq X_2 \mid X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(1 \neq X_2 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)\\
&= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{car } X_2(\Omega) = \{0, 1\}\\
&= \mathbb{P}(X_2 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) \qquad \text{car } X_1 \perp\!\!\!\perp X_2\\
&= p(1-p) + (1-p)\,p \qquad \text{car } X_1 \sim X_2 \sim \mathscr{B}(p).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 \neq X_2) = 2p(1-p).}$$

(b) Déterminons la loi de S_2. Par la question silence, $S_2(\Omega) = \{0; 2-1\} = \{0; 1\}$. Donc nécessairement S_2 suit une loi binomiale dont le paramètre est donné par la probabilité de changer de face entre le lancer 1 et 2 donc

$$\mathbb{P}(S_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 \neq X_2).$$

Par la question précédente, on a donc $\mathbb{P}(S_2 = 1) = 2p(1-p)$. Conclusion,

$$\boxed{S_2 \sim \mathscr{B}(2p(1-p)).}$$

5. (a) Exprimons $(S_3 = 1)$ en fonction des $(X_i = 0)$ et $(X_i = 1)$, $i \in [\![1; 3]\!]$. L'évènement $(S_2 = 1)$ signifie que l'on obtient un seul changement de face durant 3 lancers. On peut donc avoir *Pile - Pile - Face* ou *Pile - Face - Face* ou *Face - Pile - Pile* ou *Face - Face - Pile*.

$$\boxed{\begin{aligned}
&\text{Ainsi,}\\
&(S_3 = 1) = [(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)] \bigcup [(X_1 = 1) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 0)]\\
&\qquad \bigcup [(X_1 = 0) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)] \bigcup [(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 1)].
\end{aligned}}$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(S_3 = 1)$. Dans la question précédente, on observe que les unions sont disjointes. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1).
\end{aligned}$$

Or les lancers sont indépendants,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1)\,\mathbb{P}(X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 0)\,\mathbb{P}(X_3 = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 1)\,\mathbb{P}(X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 0)\,\mathbb{P}(X_3 = 1).
\end{aligned}$$

Enfin, $X_1 \sim X_2 \sim X_3 \sim \mathscr{B}(p)$. D'où,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_3 = 1) &= p^2(1-p) + p(1-p)^2 + (1-p)\,p^2 + (1-p)^2\,p\\
&= p(1-p)(p + 1 - p + p + 1 - p)\\
&= 2p(1-p).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_3 = 1) = 2p(1-p).}$$

(c) Déterminons la loi de S_3. Par la question 3. on a $S_3(\Omega) = [\![0;2]\!]$. Par la question précédente, $\mathbb{P}(S_3 = 1) = 2p(1-p)$. Calculons $\mathbb{P}(S_3 = 0)$. De même que dans la question précédente,

$$(S_3 = 0) = (X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) \bigcup (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_3 = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \quad \text{car l'union est disjointe} \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_3 = 0) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1) \qquad \text{car } X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp X_3 \\
&= (1-p)^3 + p^3 \qquad \text{car } X_1 \sim X_2 \sim X_3 \sim \mathscr{B}(p).
\end{aligned}$$

Et de même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_3 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 0) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_3 = 1) \qquad \text{car } X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp X_3 \\
&= (1-p)^2 p + p^2(1-p) \qquad \text{car } X_1 \sim X_2 \sim X_3 \sim \mathscr{B}(p) \\
&= p(1-p)(1-p+p) \\
&= p(1-p).
\end{aligned}$$

Pour résumer :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(S_3 = k)$	$p^3 + (1-p)^3$	$2p(1-p)$	$p(1-p)$

Vérifions notre résultat par le fait que la somme des probabilités doit faire un :

$$\begin{aligned}
p^3 + (1-p)^3 + 2p(1-p) + p(1-p) &= p^3 + 1 - 3p + 3p^2 - p^3 + 3p(1-p) \\
&= 1 - 3p + 3p^2 + 3p - 3p^2 \\
&= 1 \ \mathit{OK!}
\end{aligned}$$

On pouvait aussi dans la question ne calculer que $\mathbb{P}(S_3 = 0)$ et obtenir $\mathbb{P}(S_3 = 2)$ par la formule $\mathbb{P}(S_3 = 2) = 1 - \mathbb{P}(S_3 = 1) - \mathbb{P}(S_3 = 0)$ ou l'inverse.

6. Calculons $\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid X_1 = 1)$. Puisque $p > 0$, on a $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p > 0$. On a vu à la question 5.a que

$$\begin{aligned}
(S_3 = 1) = &(X_1 = 1, X_2 = X_3 = 0) \cup (X_1 = X_2 = 1, X_3 = 0) \\
&\cup (X_1 = 0, X_2 = X_3 = 1) \cup (X_1 = X_2 = 0, X_3 = 1).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid X_1 = 1) &= \mathbb{P}((X_1 = 1, X_2 = X_3 = 0) \cup (X_1 = X_2 = 1, X_3 = 0) \mid X_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = X_3 = 0 \mid X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1, X_3 = 0 \mid X_1 = 1) \\
&\qquad\qquad \text{car l'union est disjointe} \\
&= \mathbb{P}(X_2 = X_3 = 0 \mid X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = 0 \mid X_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_2 = X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = 0) \\
&\qquad\qquad \text{car } X_2 \text{ et } X_3 \text{ sont indépendants de } X_1 \\
&= (1-p)^2 + p(1-p) \\
&= (1-p)(1-p+p) \\
&= 1-p.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid X_1 = 1) = 1 - p.}$$

7. Calculons $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid S_3 = 1)$. Par la question 5.b $\mathbb{P}(S_3 = 1) = 2p(1-p) > 0$ car $p \in]0;1[$. Par la formule de Bayes,
$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid S_3 = 1) = \frac{\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)}{\mathbb{P}(S_3 = 1)}.$$
Par la question précédente, $\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid X_1 = 1) = 1 - p$. Par la question 1. $X_1 \sim \mathscr{B}(p)$ donc $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et enfin par la question 5.b $\mathbb{P}(S_3 = 1) = 2p(1-p)$. Ainsi,
$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid S_3 = 1) = \frac{(1-p)\,p}{2p(1-p)} = \frac{1}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid S_3 = 1) = \frac{1}{2}.}$$

Partie 2 : Au lancer n

8. (a) Précisons $(S_n = 0)$ en fonctions des $(X_k = 0)$ et $(X_k = 1)$, $k \in [\![1;n]\!]$. Pour n'obtenir aucun changement, il faut toujours obtenir pile ou toujours obtenir face. Ainsi,
$$\boxed{(S_n = 0) = (X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0) \cup (X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1)\,.}$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(S_n = 0)$. Par la question précédente et le fait que l'union est disjointe,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1)\\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 1) + \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 0) \qquad \text{car les } X_k \text{ sont indépendants}\\ &= p^n + (1-p)^n \qquad \text{car } \forall k \in [\![1;n]\!],\ X_k \sim \mathscr{B}(p).\end{aligned}$$
Conclusion
$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = 0) = p^n + (1-p)^n\,.}$$

9. Calculons $\mathbb{P}(S_n = 0, X_n = 0)$. Par la question 8.a on a
$$(S_n = 0, X_n = 0) = (X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0)\,.$$
Donc comme dans la question précédente,
$$\mathbb{P}(S_n = 0, X_n = 0) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 0) = (1-p)^n\,.$$

10. Déterminons une condition nécessaire et suffisante sur p pour que $(S_n = 0)$ et $(X_n = 0)$ soient indépendants. Par définition, ces évènements sont indépendants si et seulement si
$$\mathbb{P}(S_n = 0, X_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0)\,\mathbb{P}(X_n = 0)\,.$$

Donc par ce qui précède,

$$\begin{aligned}
(S_n = 0) \perp\!\!\!\perp (X_n = 0) \quad & \Leftrightarrow \quad (1-p)^n = [p^n + (1-p)^n](1-p) \\
& \Leftrightarrow \quad (1-p)^{n-1} = p^n + (1-p)^n \qquad \text{car } p < 1 \\
& \Leftrightarrow \quad (1-p)^{n-1} - (1-p)^n = p^n \\
& \Leftrightarrow \quad (1-p)^{n-1}(1-(1-p)) = p^n \\
& \Leftrightarrow \quad (1-p)^{n-1} p = p^n \\
& \Leftrightarrow \quad (1-p)^{n-1} = p^{n-1} \qquad \text{car } p > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1-p}{p} = 1 \qquad \text{car } \frac{1-p}{p} > 0 \text{ et } n-1 \neq 0 \text{ car } n \geqslant 2 \\
& \Leftrightarrow \quad 1-p = p \qquad \text{car } p > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 1 = 2p \\
& \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(S_n = 0) \perp\!\!\!\perp (X_n = 0) \qquad \Leftrightarrow \qquad p = \frac{1}{2}.}$$

11. Expliquer par une phrase pourquoi, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $(S_n = k, X_n = 0)$ est indépendant de $(X_{n+1} = 0)$. Soit $k \in [\![0; n]\!]$. L'évènement $(S_n = k)$ compte le nombre de changements entre les lancers 1 et n. Donc $(S_n = k)$ ne dépend que de X_1, X_2, …, X_n et non du lancer $n+1$ i.e. X_{n+1}. De même, $(S_n = k, X_n = 0)$ ne dépend que X_1, X_2, …, X_n. Or X_{n+1} est indépendant de X_1, X_2, …, X_n. Dès lors,

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n]\!], \quad (S_n = k, X_n = 0) \perp\!\!\!\perp (X_{n+1} = 0).}$$

12. Montrons que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) = (1-p)\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 0)$. Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Supposons $k \leqslant n-1$. Si $X_n = X_{n+1} = 0$, alors nous n'avons pas eu de changement de face entre les lancers n et $n+1$. Dans ce cas, $S_n = S_{n+1}$. D'où

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0).$$

Par la question précédente, $(S_n = k, X_n = 0) \perp\!\!\!\perp (X_{n+1} = 0)$ donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0)\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 0) = (1-p)\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 0).$$

Si $k = n$, alors on a eu des changements à chaque lancer et donc $\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) = 0$. Puisque $S_n(\Omega) = [\![0; n-1]\!]$, on a également $\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 0) = 0$. La formule reste donc vraie. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n]\!], \quad \mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) = (1-p)\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 0).}$$

13. Montrons que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0) &= (1-p)\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 0) + (1-p)\mathbb{P}(S_n = k-1, X_n = 1) \\
\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) &= p\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 1) + p\mathbb{P}(S_n = k-1, X_n = 0).
\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![1; n]\!]$. La famille $((X_n = 0), (X_n = 1))$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) + \mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 1).$$

Par la question précédente, $\mathbb{P}(S_{n+1}=k, X_{n+1}=0, X_n=0) = (1-p)\,\mathbb{P}(S_n=k, X_n=0)$. De même, si $X_n=1$ et $X_{n+1}=0$, alors $X_{n+1}\neq X_n$ et donc $S_{n+1}=S_n+1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+1}=k, X_{n+1}=0, X_n=1) &= (S_n+1=k, X_{n+1}=0, X_n=1)\\ &= (S_n=k-1, X_{n+1}=0, X_n=1).\end{aligned}$$

Or X_{n+1} est indépendant de S_n et de X_n donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+1}=k, X_{n+1}=0, X_n=1) &= \mathbb{P}(X_{n+1}=0)\,\mathbb{P}(S_n=k-1, X_n=1)\\ &= (1-p)\,\mathbb{P}(S_n=k-1, X_n=1).\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{n+1}=k, X_{n+1}=0) = (1-p)\,\mathbb{P}(S_n=k, X_n=0) + (1-p)\,\mathbb{P}(S_n=k-1, X_n=1).}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+1}=k, X_{n+1}=1) &= \mathbb{P}(S_{n+1}=k, X_{n+1}=1, X_n=0) + \mathbb{P}(S_{n+1}=k, X_{n+1}=1, X_n=1)\\ &= \mathbb{P}(S_n=k-1, X_{n+1}=1, X_n=0) + \mathbb{P}(S_n=k, X_{n+1}=1, X_n=1)\\ &= p\mathbb{P}(S_n=k-1, X_{n+1}=1) + p\mathbb{P}(S_n=k, X_{n+1}=1)\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{n+1}=k, X_{n+1}=1) = p\mathbb{P}(S_n=k, X_n=1) + p\mathbb{P}(S_n=k-1, X_n=0).}$$

14. Déterminons pour tout $(i,j)\in\{0;1\}^2$, $\mathbb{P}(S_2=i, X_2=j)$. On observe que

$$(S_2=0, X_2=0) = (X_1=X_2=0).$$

Donc

$$\mathbb{P}(S_2=0, X_2=0) = (1-p)^2.$$

De même, pour les autres valeurs, on obtient alors,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(S_2=0, X_2=0) = (1-p)^2 \quad && \mathbb{P}(S_2=0, X_2=1) = p^2\\ &\mathbb{P}(S_2=1, X_2=0) = p(1-p) \quad && \mathbb{P}(S_2=1, X_2=1) = p(1-p).\end{aligned}$$

15. Retrouvons la valeur $\mathbb{P}(S_3=1)$. La famille $((X_3=1),(X_3=0))$ forme un système complet d'évènement. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(S_3=1) = \mathbb{P}(S_3=1, X_3=0) + \mathbb{P}(S_3=1, X_3=1).$$

Par la question 13. en prenant $n=2$ et $k=1\in[\![1;2]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_3=1) = (1-p)\,&\mathbb{P}(S_2=1, X_2=0) + (1-p)\,\mathbb{P}(S_2=0, X_2=1)\\ &+ p\mathbb{P}(S_2=1, X_2=1) + p\mathbb{P}(S_2=0, X_2=0).\end{aligned}$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_3=1) &= (1-p)\,p(1-p) + (1-p)\,p^2 + pp(1-p) + p(1-p)^2\\ &= p(1-p)[1-p+p+p+1-p]\\ &= 2p(1-p).\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve le résultat de la question 5.b

$$\boxed{\mathbb{P}(S_3=1) = 2p(1-p).}$$

Partie 3 : Cas de la pièce équilibrée

On suppose dans toute la suite que $p = 1/2$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_n = k)\, t^k,$$

appelée la fonction génératrice de S_n.

16. Déterminons $G_n(0)$ et $G_n(1)$. Par définition,

$$G_n(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_n = k)\, 0^k = \mathbb{P}(S_n = 0) + 0 = \mathbb{P}(S_n = 0)\,.$$

Par la question 8.b

$$G_n(0) = p^n + (1-p)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = 2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

D'autre part,

$$G_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_n = k)\, 1^k = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_n = k)\,.$$

Or $(S_n = k)_{k \in [\![0;n-1]\!]}$ forme un système complet. Donc $G_n(1) = 1$. Conclusion,

$$\boxed{G_n(0) = \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad G_n(1) = 1.}$$

17. Précisons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_2(t)$. Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_2(t) = \sum_{k=0}^{1} \mathbb{P}(S_2 = k)\, t^k = \mathbb{P}(S_2 = 0) + t\mathbb{P}(S_2 = 1)\,.$$

Par la question 4.b

$$G_2(t) = (1 - 2p(1-p)) + t2p(1-p) = 1 - 2p + 2p^2 + 2p(1-p)\,t.$$

Or $p = 1/2$. Donc

$$G_2(t) = 1 - 1 + 2 \times \frac{1}{4} + \frac{t}{2} = \frac{1+t}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_2(t) = \frac{1+t}{2}.}$$

18. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, exprimons $\mathbb{P}(S_{n+1} = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(S_n = k)$ et $\mathbb{P}(S_n = k-1)$. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On sait que $(X_{n+1} = k)_{k \in [\![0;1]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 1)\,.$$

Par la question 13. on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1}=k) &= (1-p)\,\mathbb{P}(S_n=k, X_n=0) + (1-p)\,\mathbb{P}(S_n=k-1, X_n=1) \\
&\quad + p\mathbb{P}(S_n=k, X_n=1) + p\mathbb{P}(S_n=k-1, X_n=0) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=k, X_n=0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=k-1, X_n=1) \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=k, X_n=1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=k-1, X_n=0) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(S_n=k, X_n=0) + \mathbb{P}(S_n=k-1, X_n=1)\right. \\
&\quad \left. +\mathbb{P}(S_n=k, X_n=1) + \mathbb{P}(S_n=k-1, X_n=0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(S_n=k) + \mathbb{P}(S_n=k-1)\right),
\end{aligned}$$

par la formule des probabilités totales car $(X_n=k)_{k\in[\![0;1]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(S_{n+1}=k) = \frac{\mathbb{P}(S_n=k)+\mathbb{P}(S_n=k-1)}{2}.}$$

19. Montrons que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $G_{n+1}(t) = \frac{1+t}{2}G_n(t)$. Soit $t\in\mathbb{R}$. On a par définition,

$$G_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_{n+1}=k)\,t^k = \mathbb{P}(S_{n+1}=0) + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(S_{n+1}=k)\,t^k.$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \mathbb{P}(S_{n+1}=0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbb{P}(S_n=k)+\mathbb{P}(S_n=k-1)}{2}t^k \\
&= \mathbb{P}(S_{n+1}=0) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)\,t^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(S_n=k-1)\,t^k \\
&= \mathbb{P}(S_{n+1}=0) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(S_n=k)\,t^k + 0 - \mathbb{P}(S_n=0)\right) \qquad \text{car } \mathbb{P}(S_n=n)=0 \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(S_n=k)\,t^{k+1} \quad \text{en posant } \tilde{k}=k-1 \\
&= \mathbb{P}(S_{n+1}=0) - \frac{\mathbb{P}(S_n=0)}{2} + \frac{1}{2}G_n(t) + \frac{t}{2}G_n(t) \\
&= p^{n+1} + (1-p)^{n+1} - \frac{p^n+(1-p)^n}{2} + \frac{1+t}{2}G_n(t) \qquad \text{par la question 8.b} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}}{2} + \frac{1+t}{2}G_n(t) \qquad \text{car } p=1/2 \\
&= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1+t}{2}G_n(t) \\
&= \frac{1+t}{2}G_n(t).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}, \quad G_{n+1}(t) = \frac{1+t}{2}G_n(t).}$$

20. Déterminons une expression de $G_n(t)$ en fonction de n et de t. Soit $t\in\mathbb{R}$. Posons pour tout $n\geqslant 2$, $u_n = G_n(t)$. Par la question précédente,

$$\forall n\geqslant 2, \quad u_{n+1} = \frac{1+t}{2}u_n.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1+t}{2}$ (qui est bien indépendant de n!). Dès lors,

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} G_2(t).$$

Donc par la question 17.

$$\forall n \geqslant 2, \quad G_n(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} \frac{1+t}{2} = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad G_n(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.}$$

21. Par la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_n = k)\, t^k = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.$$

Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_n = k)\, X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $Q = \left(\frac{1+X}{2}\right)^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a donc, par la formule du binôme de Newton,

$$Q = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}}\right) X^k.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P(t) = Q(t).$$

Donc le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines et donc $P - Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$ i.e. $P = Q$ ou encore

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_n = k)\, X^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}}\right) X^k.$$

Conclusion, par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n-1]\!], \quad \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

22. Vérifions la cohérence avec les questions 8.b et 5.b Par la question 8.b

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = p^n + (1-p)^n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par la question précédente,

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \binom{n-1}{0} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

Donc

$$\boxed{\text{cela est bien cohérent avec la question 8.b}}$$

D'autre part, par la question 5.b

$$\mathbb{P}(S_3 = 1) = 2p(1-p) = \frac{1}{2}.$$

Et par la question précédente,

$$\mathbb{P}(S_3 = 1) = \binom{2}{1} \frac{1}{2^2} = 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{cela est bien cohérent avec la question 5.b}}$$

Problème II - Algèbre (d'après banque PT 2022)

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note M^T sa transposée et $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace. Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dit stable par produit si pour toutes matrices M et N de F, le produit MN appartient à F. Soient a, b et c trois réels. On note $M(a,b,c)$ la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ et $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M(a,b,c)$. E désigne l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes $f_{a,b,c}$ lorsque (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$. Enfin on note $I = M(1,0,0)$, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

Partie 1 : Questions de cours

1. Soit n un entier naturel non nul. On a

$$\boxed{\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\boxed{\sum z^n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad |z| < 1.}$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.}$$

Partie 2 : Un supplémentaire orthogonal

3. Démontrons que E est un espace vectoriel et précisons une base et la dimension de cet espace. Par définition,

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

On observe alors les points suivants,

- $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
- Si $M = 0_2$, alors en prenant $a = b = c$, on a $M = 0_2 = M(0,0,0) \in E$.
- Soient $(M, M') \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors, il existe $(a,b,c,a',b',c') \in \mathbb{R}^6$ tel que $M = M(a,b,c)$ et $M' = M(a',b',c')$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \lambda M + \mu N &= \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & a' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' & \lambda a + \mu a' \end{bmatrix} \\ &= M\left(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c'\right) \in E. \end{aligned}$$

  Donc E est stable par combinaisons linéaires.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc

$$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel.}}$$

On pouvait aussi écrire E directement sous forme de Vect.

De plus, posons $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} = aI_2 + bE_{12} + cE_{12} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}(I_2, E_{12}, E_{21}).$$

Donc $\mathscr{B}_E = (I_2, E_{12}, E_{21})$ engendre E. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha I_2 + \beta E_{12} + \gamma E_{21} = 0_2.$$

Alors, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = 0_2$ et donc par unicité des coefficients d'une matrice, $\alpha = \beta = \gamma = 0_{\mathbb{R}}$. Ainsi, $\mathscr{B}_E$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_E \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_E) = 3.}$$

4. Donnons une base d'un supplémentaire de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B}_F = (E_{22})$ et $F = \operatorname{Vect}(B_F)$.

   - $\mathscr{B}_E$ est une base de E,
   - $\mathscr{B}_F$ engendre F et est constitué d'un vecteur non nul donc est libre et est donc une base de F,
   - Posons $\mathscr{B}_{E+F} = (\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

   $$aI_2 + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} = 0.$$

   Alors,

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+d \end{pmatrix} = 0_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = b = c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0.$$

   Donc $\mathscr{B}_{E+F}$ est libre. De plus, $\operatorname{Card}(\mathscr{B}_{E+F}) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. Donc $\mathscr{B}_{E+F}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

   $$\boxed{F = \operatorname{Vect}(E_{22}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est un suppémentaire de } E \text{ dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

On considère la fonction φ définie sur $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ par :

$$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2, \ \varphi(M, N) = \operatorname{Tr}\left(M^T N\right).$$

5. Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrons que l'application $\varphi_1 : M \mapsto \varphi(M, N)$ est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$. On a les égalités suivantes :

   $$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda M_1 + \mu M_2) &= \varphi(\lambda M_1 + \mu M_2, N) \\ &= \operatorname{Tr}\left((\lambda M_1 + \mu M_2, N)^T N\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(\left(\lambda M_1^T + \mu M_2^T\right) N\right) && \text{car la transposée est linéaire} \\ &= \operatorname{Tr}\left(\lambda M_1^T N + \mu M_2^T N\right) \\ &= \lambda \operatorname{Tr}\left(M_1^T N\right) + \mu \operatorname{Tr}\left(M_2^T N\right) && \text{car la trace est linéaire} \\ &= \lambda \varphi(M_1, N) + \mu \varphi(M_2, N) \\ &= \lambda \varphi_1(M_1) + \mu \varphi_1(M_2). \end{aligned}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\text{l'application } \varphi_1 \text{ est linéaire.}}$$

6. Vérifions que $\varphi(I, J+K) = 0$. On a
$$\varphi(I, J+K) = \operatorname{Tr}\left(I^T (J+K)\right).$$
Or $I = M(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Donc
$$\begin{aligned}\varphi(I, J+K) &= \operatorname{Tr}\left(I_2^T (J+K)\right) \\ &= \operatorname{Tr}(J+K) \\ &= \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= 0+0=0.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\varphi(I, J+K) = 0.}$$

7. Calculons $H = 2\left(\varphi(K, I)\frac{I}{\varphi(I,I)} + \varphi(K, J+K)\frac{J+K}{\varphi(J+K, J+K)}\right)$. On a
$$\begin{aligned}\varphi(K, I) &= \operatorname{Tr}\left(K^T I_2\right) = \operatorname{Tr}\left(K^T\right) = \operatorname{Tr}(K) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \\ \varphi(I, I) &= \operatorname{Tr}\left(I_2^T I_2\right) = \operatorname{Tr}(I_2) = 2 \\ J+K &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(K, J+K) &= \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \\ \varphi(J+K, J+K) &= \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2.\end{aligned}$$
Dès lors,
$$H = 2\left(0 + 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J+K.$$
Conclusion,
$$\boxed{H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J+K.}$$

8. Montrons que $\mathscr{B} = (I, J, H)$ est une base de E. Commençons par observer que $I = M(1,0,0) \in E$, $J = M(0,1,0) \in E$ et $H = J+K \in E$ par stabilité de E par somme (ou encore $H = M(0,1,1)$). Donc $\mathscr{B}$ est bien une famille de vecteurs de E. De plus, on peut si on le souhaite montrer que $\mathscr{B}$ est génératrice de E. Montrons plutôt ici que $\mathscr{B}$ est libre. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$aI + bJ + cH = 0_2.$$
Alors,
$$\begin{pmatrix} a & b+c \\ c & a \end{pmatrix} = 0_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. Enfin, par la question 3.

$$\operatorname{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(E).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.}$$

9. On pose $E^{\perp} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \varphi(I, M) = \varphi(J, M) = \varphi(H, M) = 0\}$. Démontrons que $E^{\perp}$ est une droite vectorielle. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in E^{\perp} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(I, M) = 0 \\ \varphi(J, M) = 0 \\ \varphi(H, M) = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Tr}(M) = 0 \\ \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0 \\ \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + d = 0 \\ \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\right) = 0 \\ \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\right) = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + d = 0 \\ b = 0 \\ c + b = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} d = -a \\ b = c = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$E^{\perp} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi $E^{\perp}$ est bien un espace vectoriel, engendré par un seul vecteur directeur, il est donc de dimension 1 :

$$\boxed{\text{l'ensemble } E^{\perp} \text{ est une droite vectorielle.}}$$

10. Montrons que $E^{\perp}$ est un supplémentaire de E. Montrons que $E^{\perp} \cap E = \{0_2\}$. Soit $M \in E^{\perp} \cap E$. Puisque $M \in E$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

De plus, $M \in E^{\perp}$ donc par la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $M = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Par unicité des coefficients d'une matrice,

$$\begin{cases} a = \lambda \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = -\lambda \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = \lambda = 0.$$

Donc $M = 0_2$. Ainsi, $E^{\perp} \cap E \subset \{0_2\}$. Or $\{0_2\} \subset E^{\perp} \cap E$. Conclusion,

$$E^{\perp} \cap E = \{0_2\}.$$

De plus, par les questions précédentes

$$\dim\left(E^{\perp}\right) + \dim(E) = 1 + 3 = 4 = \dim\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les espaces } E^{\perp} \text{ et } E \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

11. Montrons que pour tout $(M, N) \in E^{\perp} \times E$, $\varphi(M, N) = 0$. Soient $(M, N) \in E^{\perp} \times E$. Alors, il existe $(a, b, c, \lambda) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad N = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi(M, N) &= \operatorname{Tr}\left(M^T N\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & -c \\ b & -a \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda (a - a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (M, N) \in E^{\perp} \times E, \quad \varphi(M, N) = 0.}$$

Soit p un projecteur appartenant à $\mathcal{E}$ distincte de l'identité et de l'application nulle. Il existe donc deux droites vectorielles distinctes $D_1 = \operatorname{Vect}(e_1)$ et $D_2 = \operatorname{Vect}(e_2)$, avec (e_1, e_2) une base de $\mathbb{R}^2$, telles que p soit la symétrie sur D_1 parallèlement à D_2.

12. Ecrivons la matrice de p dans la base (e_1, e_2) et calculons la trace de cette matrice. Puisque $e_1 = e_1 + 0 \in D_1 \oplus D_2$ par définition de la projection,

$$p(e_1) = e_1.$$

Au contraire, $e_2 = 0 + e_2 \in D_1 \oplus D_2$ donc

$$p(e_2) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{A = \operatorname{mat}_{(e_1, e_2)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

et on a

$$\boxed{\operatorname{Tr}(A) = 1.}$$

13. Soit B la matrice de p dans une autre base. Par la formule de changement de base, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Dès lors,
$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right).$$
Or $\mathrm{Tr}(UV) = \mathrm{Tr}(VU)$ donc
$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}\left(APP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(A).$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A) = 1.}$$

14. Déterminons quelles sont les matrices $M(a,b,c)$ pour lesquelles $f_{a,b,c}$ est un projecteur (distinct de l'identité et de l'application nulle). Soit $p = f_{a,b,c}$ un tel projecteur et $A = M(a,b,c)$ sa matrice dans une base, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Par la question précédente
$$1 = \mathrm{Tr}(M(a,b,c)) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\right) = 2a.$$
Par conséquent,
$$a = \frac{1}{2}.$$
Cela exclut déjà l'identité et l'application nulle. Donc $A = \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ c & 1/2 \end{pmatrix}$. Maintenant, on sait que l'endomorphisme $p = f_{a,b,c}$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$ ou encore si et seulement si
$$A^2 = A.$$
Donc
$$\begin{aligned} p \text{ est un projecteur} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ c & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & b \\ c & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ c & 1/2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + bc & b \\ c & \frac{1}{4} + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ c & 1/2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} + bc = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad bc = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$
Conclusion, l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ représentant une projection est donné par
$$\boxed{\mathscr{P} = \left\{ M\left(\frac{1}{2}, b, \frac{1}{4b}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{R}^* \right\}.}$$

Partie 3 : Espaces stables par produit

15. Montrons que le produit de deux matrices de E n'est pas toujours une matrice de E. On note par exemple que $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in E$ et $J - K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in E$ et pourtant
$$H(J-K) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin E.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{le produit de deux matrices de } E \text{ n'est pas toujours une matrice de } E.}$$

16. L'objectif de cette question est de déterminer les droites vectorielles Δ de E qui sont stables par produit. Soit Δ une droite vectorielle engendrée par $M_0 = M(a_0, b_0, c_0)$.

   (a) Si Δ est stable par produit alors puisque $M_0 \in \Delta$, on a directement $M_0^2 \in \Delta$. Réciproquement, supposons que $M_0^2 \in \Delta$. Soit $(M_1, M_2) \in \Delta^2$. Puisque M_0 engendre Δ, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M_1 = \lambda_1 M_0$ et $M_2 = \lambda_2 M_0$. Dès lors,

$$M_1 M_2 = \lambda_1 \lambda_2 M_0^2.$$

Puisque $M_0^2 \in \Delta$ et que Δ est un espace vectoriel (donc stable par multiplication externe), on obtient que $M_1 M_2 \in \Delta$. Ceci étant vrai pour tout couple d'éléments de Δ, on en déduit que Δ est stable par produit. Conclusion,

$$\boxed{\Delta \text{ stable par produit} \qquad \Leftrightarrow \qquad M_0^2 \in \Delta.}$$

   (b) On suppose que $M_0^2 \in \Delta$.

      i. Par hypothèse, $\Delta = \mathrm{Vect}(M_0)$. Donc par définition, si $M_0^2 \in \mathrm{Vect}(M_0)$, alors

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \qquad M_0^2 = \lambda M_0.}$$

      ii. Calculons :

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^2 + b_0 c_0 & 2a_0 b_0 \\ 2a_0 c_0 & a_0^2 + b_0 c_0 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, si $\lambda = 0$ i.e. $M_0^2 = 0_2$, alors

$$\begin{cases} a_0^2 + b_0 c_0 = 0 \\ 2a_0 b_0 = 0 \\ 2a_0 c_0 = 0 \\ a_0^2 + b_0 c_0 = 0 \end{cases}.$$

Supposons $a_0 \neq 0$. Dans ce cas,

$$\begin{cases} a_0^2 + b_0 c_0 = 0 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = 0 \\ a_0^2 + b_0 c_0 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a_0 = 0 \qquad \text{contradiction.}$$

Donc $a_0 = 0$ et par suite $b_0 c_0 = 0$ donc $b_0 = 0$ ou $c_0 = 0$. On obtient donc $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix} = c_0 K$ ou $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_0 J$. Conclusion,

$$\boxed{\text{si } \lambda = 0, \text{ alors } M_0 \text{ est proportionnelle à } J \text{ ou } K.}$$

      iii. On suppose que $\lambda \neq 0$. On pose $M_0' = \frac{1}{\lambda} M_0$. Alors, $(M_0')^2 = \frac{1}{\lambda^2} M_0^2$. Or par hypothèse, $M_0^2 = \lambda M_0$. Donc

$$(M_0')^2 = \frac{1}{\lambda^2} \lambda M_0 = \frac{1}{\lambda} M_0 = M_0'.$$

Conclusion,

$$\boxed{M_0' \text{ est la matrice canoniquement associée à un projecteur.}}$$

(c) Procédons par analyse-synthèse. Si $M_0^2 \in \Delta$, alors $M_0^2 = \lambda M_0$. Si $\lambda = 0$ alors, on a vu qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $M_0 = \mu J$ ou $M_0 = \mu K$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda} M_0$ est une matrice de E (car $M_0 \in \Delta \subset E$) d'un projecteur. Donc par la question 14., $M_0 = O_2$ impossible car M_0 engendre une droite, $M_0 = I_2$ ou il existe $b \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\frac{1}{\lambda} M_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad M_0 = \lambda \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement,

- si $M_0 = \mu J$. Alors, $M_0^2 = \mu^2 J^2 = \mu^2 O_2 = O_2 \in \Delta$.
- De même, si $M_0 = \mu K$, alors $M_0^2 = 0_2 \in \Delta$.
- Si $M_0 = I_2 = I$, alors $M_0^2 = M_0 \in \Delta$.
- Enfin, si $M_0 = \lambda \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}^*$, alors, par la question 14. $\begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur. Donc
$$M_0^2 = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix} = \lambda M_0 \in \Delta.$$

Conclusion, par la question 16.a on en déduit que Δ est stable par produit si et seulement si

$$\boxed{\Delta = \mathrm{Vect}\,(I) \quad \text{OU} \quad \Delta = \mathrm{Vect}\,(J) \quad \text{OU} \quad \Delta = \mathrm{Vect}\,(K)}$$
$$\boxed{\text{OU} \quad \exists b \in \mathbb{R}^*,\ \Delta = \mathrm{Vect}\,(M\,(1/2, b, 1/(4b)))\,.}$$

17. L'objectif de cette question est de déterminer les plans vectoriels de E stables par produit.

(a) Posons $P_1 = \mathrm{Vect}\,(I, J)$. Soit $(M, M') \in P_1^2$. Il existe alors $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aI + bJ$ et $M' = a'I + b'J$. Par suite,

$$MM' = aa'I^2 + ab'IJ + a'bJI + bb'J^2 = aa'I + \left(ab' + a'b\right) J + 0_2 \in P_1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le plan vectoriel engendré par } I \text{ et } J \text{ est stable par produit.}}$$

(b) On a déjà observé que $H\,(J - K) = (J + K)\,(J - K) \notin E$, donc en particulier $(J + K)\,(J - K) \notin \mathrm{Vect}\,(J, K)$. Or $J + K \in \mathrm{Vect}\,(J, K)$ et $J - K \in \mathrm{Vect}\,(J, K)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{le plan vectoriel engendré par } J \text{ et } K \text{ n'est pas stable par produit.}}$$

(c) Soit $M\,(a, b, c) \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$M\,(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad b = c \qquad \Leftrightarrow \qquad M\,(a, b, c) = M\,(a, b, b)\,.$$

Ainsi,

$$E \cap \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\,(I, J + K)\,.$$

La famille $(I, J + K)$ engendre $E \cap \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R})$ et est libre (les deux matrices ne sont pas colinéaires) donc $(I, J + K)$ est une base de $E \cap \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R})$. Ainsi l'ensemble des matrices symétriques de E est un plan vectoriel. Montrons qu'il est stable par produit. Soit $M = M\,(a, b, b)$ et $M' = (a', b', b')$ deux éléments de $E \cap \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R})$. Alors,

$$MM' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bb' & a'b + ab' \\ a'b + ab' & aa' + bb' \end{pmatrix} \in E \cap \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R})\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices symétriques de } E \text{ est un plan vectoriel stable par produit.}}$$

(d) Soit $(b,c) \neq (0,0)$. Posons $M = \alpha I + \beta\,(bJ+cK) = M\,(\alpha, \beta b, \beta c)$ et $M' = \alpha' I + \beta'\,(bJ+cK) = M\,(\alpha', \beta' b, \beta' c)$. Dès lors,

$$MM' = \alpha\alpha' I + \left(\alpha\beta' + \alpha'\beta\right)(bJ+cK) + \beta\beta'\,(bJ+cK)^2.$$

Or

$$(bJ+cK)^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = bcI.$$

Ainsi,

$$MM' = \underbrace{\left(\alpha\alpha' + bc\right)}_{=\alpha''} I + \underbrace{\left(\alpha\beta' + \alpha'\beta\right)}_{=\beta''}(bJ+cK) \in \mathrm{Vect}\,(I, bJ+cK)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le sous-espace vectoriel engendré par } I \text{ et } bJ+cK \text{ est stable par produit.}}$$

(e) Soit $P = \mathrm{Vect}\,(U,V)$ un plan vectoriel de E stable par produit, avec (U,V) deux matrices de E non colinéaires. Il existe $(a,b,c,a',b',c') \in \mathbb{R}^6$ tel que $U = M\,(a,b,c)$ et $V = M\,(a',b',c')$. Supposons que $a = a' = 0$. Alors, U et V sont des combinaisons linéaires de J et K, donc (J,K) engendre P ce qui est impossible d'après la question 17.b. Donc $(a,a') \neq (0,0)$. On peut supposer $a \neq 0$ (le cas $a = 0$ et $a' \neq 0$ se traite de la même façon). Dans ce cas, puisque les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré,

$$\begin{aligned}
P = \mathrm{Vect}\,(U,V) &= \mathrm{Vect}\left(aI + bJ + cK, a'I + b'J + c'K\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(I + \frac{b}{a}J + \frac{c}{a}K, a'I + b'J + c'K\right) && C_1 \leftarrow \frac{1}{a}C_1 \\
&= \mathrm{Vect}\left(I + \frac{b}{a}J + \frac{c}{a}K, \left(b' - \frac{a'}{a}b\right)J + \left(c' - \frac{a'}{a}c\right)K\right) && C_2 \leftarrow C_2 - a'C_1.
\end{aligned}$$

Posons $b'' = b' - \frac{a'}{a}b$, $c'' = c' - \frac{a'}{a}c$ et $V'' = b''J + c''K$. Alors on a $V'' \in P$ et donc par stabilité par produit, $(V'')^2 \in E$ i.e.

$$\begin{pmatrix} 0 & b'' \\ c'' & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b''c'' & 0 \\ 0 & b''c'' \end{pmatrix} = b''c''I \in E.$$

Or $V'' \neq 0$ (car vecteur directeur de P) donc $b''c'' \neq 0$, et donc $I \in E$. Puisque $I \neq O_2$, I est un vecteur directeur du plan P. Soit W un vecteur de P non colinéaire à I :

$$P = \mathrm{Vect}\,(I, W)\,.$$

Puisque $W \in P \subset E$, il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, $W = M\,(\alpha,\beta,\gamma)$. On obtient alors,

$$P = \mathrm{Vect}\,(I, \alpha I + \beta J + \gamma K) = \mathrm{Vect}\,(I, \beta J + \gamma K) \qquad C_2 \leftarrow C_2 - \alpha C_1.$$

Conclusion, les seuls plans vectoriels de E stables par produit sont de la forme

$$\boxed{P = \mathrm{Vect}\,(I, bJ+cK)\,, \qquad (b,c) \in \mathbb{R}^2.}$$