Commentaires du DS10-CCB
Probabilités et algèbre

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{70}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2	Total	Note finale
Moyenne	-1,2	5,6	2,7	0,9	9,3	1,4	8,4	1,4	11,1	19,1	6,67
Sur		19	18	13	50	3	25	22	50	100	20

TOTAL : 100 pt

Problème I - Probabilités 50 pt

On lance à plusieurs reprises une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$. Les lancers sont supposés indépendant. On souhaite compter le nombre de changements de face obtenus lors de $n \in \mathbb{N}^*$ lancers. On fixe $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel toutes les variables aléatoires de ce problème sont supposées définies. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- X_n la variable aléatoire retournant 1 si la pièce donne pile au lancer numéro n et 0 si la pièce donne face à ce lancer.
- S_n la variable aléatoire retournant le nombre de changements de face obtenus durant les n premiers lancers.

Par exemple si la pièce a donné *pile* - *face* - *face* - *pile* alors $S_2 = 1$, $S_3 = 1$, $S_4 = 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Partie 1 : Généralités et premiers lancers 19 pt

1. **1 pt** Quelle est la loi de X_n ?

   Facile mais trop d'erreurs qui dans la grande majorité des cas révèlent un manque d'apprentissage du cours. Une petite phrase de rédaction pour le justifier est naturellement le bienvenu.

2. **2 pt** Quelle est la loi de $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$? Préciser $\mathbb{P}(T_n = 2)$.

   Là aussi trop de parachutages du genre c'est une uniforme ou c'est une binomiale sans les paramètres. Il fallait donner les paramètres mais aussi (obligatoirement pour avoir tous les points) justifier pourquoi c'est une binomiale. La donner de $\mathbb{P}(T_n = 2)$ est très peu souvent correcte, alors qu'il n'y a qu'à réciter le cours...

3. **2 pt** Déterminer l'univers image de S_n.

   Plusieurs bonnes réponses mais attention à là aussi le rédiger un minimum.

4. (a) **2 pt** Calculer $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$.

   Pratiquement personne n'invoque la formule des probabilités totales en conditionnant par rapport aux valeurs de X_1. Quelques bonnes réponses en donnant l'évènement sous la forme $(X_1 = 1, X_2 = 0) \cup (X_1 = 0, X_2 = 1)$ mais bien trop peu. J'ai encore eu beaucoup de parachutages qui ne rapportaient qu'une toute petite fraction de points. Certains ont traité tous le problème en prenant la pièce équilibrée contrairement à ce qu'indiquait l'énoncé ! Cela les a lourdement sanctionnés.

(b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire la loi de S_2.
Une moitié de réponses seulement. Plusieurs donnent bien la loi mais ne pense pas à y reconnaitre une loi de Bernoulli.

5. (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Exprimer $(S_3 = 1)$ en fonction des $(X_i = 0)$ et $(X_i = 1)$, $i \in [\![1;3]\!]$.
Bien dans l'ensemble. Attention à ne pas écrire des sommes d'évènements (ce qui n'a pas de sens) mais bien des unions.

(b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire $\mathbb{P}(S_3 = 1)$.
Beaucoup trop de parachutages, preuves ici d'un manque de pratique d'exercices (vu que ce sont toujours les mêmes arguments) : union disjointe + indépendance ou formule des probabilités composées (ici c'était l'indépendance). Deux ou trois très bonnes copies.

(c) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer la loi de S_3.
Idem, n'a été réussie que par ceux qui ont compris la mécanique des deux questions précédentes.

6. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid X_1 = 1)$.

Beaucoup de confusions entre probabilités conditionnelles et intersection.

7. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid S_3 = 1)$.

Bien dans l'ensemble, 1 point était donnée pour le nom et l'écriture de la formule de Bayes. Ensuite, il fallait avoir les bonnes valeurs précédentes, ce qui n'a été le cas que dans une ou deux copies.

Partie 2 : Au lancer n $\boxed{\textbf{18 pt}}$

8. (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Préciser $(S_n = 0)$ en fonctions des $(X_k = 0)$ et $(X_k = 1)$, $k \in [\![1;n]\!]$.
Bien dans l'ensemble mais une rédaction est attendue.

(b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire $\mathbb{P}(S_n = 0)$.
Même remarque que pour la question 5.b

9. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0, X_n = 0)$.

Quelques bonnes réponses.

10. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p pour que $(S_n = 0)$ et $(X_n = 0)$ soient indépendants.

Un demi-point pour la définition de l'indépendance. Peu réussie car il fallait les valeurs précédentes. Plusieurs ont répondu $p = 0$, ce qui est impossible puisque $p \in]0;1[$. Dans le calcul d'ailleurs si on simplifie par p ou $1-p$ il faut justifier que $p \in]0;1[$ d'ailleurs.

11. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Expliquer par une phrase pourquoi, pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $(S_n = k, X_n = 0)$ est indépendant de $(X_{n+1} = 0)$.

Une ou deux bonnes réponses seulement.

12. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) = (1-p)\,\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 0).$$

Quelques bonnes réponses mais pas toujours bien rédigées, avec un raisonnement à consolider.

13. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 0) = (1-p)\,\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 0) + (1-p)\,\mathbb{P}(S_n = k-1, X_n = 1)$$
$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = p\mathbb{P}(S_n = k, X_n = 1) + p\mathbb{P}(S_n = k-1, X_n = 0).$$

Très peu de réponses.

14. **2 pt** Déterminer pour tout $(i,j) \in \{0;1\}^2$, $\mathbb{P}(S_2 = i, X_2 = j)$.
    Une seule réponse.

15. **2 pt** A l'aide des deux questions précédentes, retrouver la valeur $\mathbb{P}(S_3 = 1)$.
    Une seule réponse.

Partie 3 : Cas de la pièce équilibrée **13 pt**

On suppose dans toute la suite que $p = 1/2$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_n = k)\, t^k,$$

appelée la fonction génératrice de S_n.

16. **2 pt** Déterminer $G_n(0)$ et $G_n(1)$.
    Attention vous vous êtes presque tous fait avoir par le cas $k = 0$: t^0 dans $G_n(0)$ qui vaut toujours 1 même si $t = 0$. Dans $G_n(1)$ il ne fallait pas laisser la somme mais bien dire que cela faisait 1.

17. **1 pt** Préciser pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_2(t)$.
    Là aussi il ne fallait pas laisser $\mathbb{P}(S_2 = 0)$ ou $\mathbb{P}(S_2 = 1)$ mais réinjecter les valeurs en se servant de la question 4.b et de la valeur $p = 1/2$.

18. **2 pt** Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, exprimer $\mathbb{P}(S_{n+1} = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(S_n = k)$ et $\mathbb{P}(S_n = k-1)$.
    Une ou deux bonnes réponses mais mal rédigée ou au raisonnement incomplet.

19. **2 pt** En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
    $$G_{n+1}(t) = \frac{1+t}{2} G_n(t).$$
    Deux ou trois belles réponses.

20. **2 pt** En déduire une expression de $G_n(t)$ en fonction de n et de t.
    Une seule copie a repéré la suite géométrique mais s'est trompé sur le premier terme.

21. **2 pt** En déduire pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $\mathbb{P}(S_n = k)$.
    Non réussie.

22. **2 pt** Vérifier la cohérence avec les questions 8.b et 5.b
    Non traitée.

Problème II - Algèbre (d'après banque PT 2022) 50 pt

Les questions avec un astérisque ont été modifiées par rapport au sujet initial.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note M^T sa transposée et $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace. Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dit stable par produit si pour toutes matrices M et N de F, le produit MN appartient à F. Soient a, b et c trois réels. On note $M(a,b,c)$ la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ et $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M(a,b,c)$. E désigne l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes $f_{a,b,c}$ lorsque (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$. Enfin on note $I = M(1,0,0)$, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

Partie 1 : Questions de cours 3 pt

1. 1 pt Soit n un entier naturel non nul. Donner la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

   J'ai beaucoup souffert sur cette question, beaucoup de bonnes réponses mais pas uniquement. J'ai vu du n mais aussi du 2...

2. 2 pt Soit $z \in \mathbb{C}$. A quelle condition la série géométrique $\sum z^n$ converge-t-elle ? Préciser alors la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

   L'apprentissage du cours est globalement cruellement trop fragile. Vous sous-estimez l'impact négatif d'un cours approximatif.

Partie 2 : Un supplémentaire orthogonal 25 pt

3. 3 pt Démontrer que E est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.

   Personne n'a pratiqué $E = \mathrm{Vect}(\dots)$ donc E est un espace vectoriel, dommage. Plusieurs bonnes réponses mais beaucoup d'entre vous ont du mal à démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ou à en extraire une base.

4. 2 pt Donner une base d'un supplémentaire de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Plusieurs belles réponses. Quelques réponses incomplètes : $E + F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par exemple ne suffit. Idem pour $E \cap F = \{0_2\}$.

On considère la fonction φ définie sur $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ par :

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2,\ \varphi(M,N) = \mathrm{Tr}\left(M^T N\right).$$

5. 2 pt * Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que l'application $\varphi_1 : M \mapsto \varphi(M,N)$ est linéaire.

   Bien globalement. Inutile de prendre des coefficients précis pour M ou N. N'hésitez pas à parler de la linéarité de la transposée et de la trace.

6. 2 pt * Vérifier que $\varphi(I, J+K) = 0$.

   Bien. Quelques réponses trop rapides, présentez vos calculs.

7. 2 pt * Calculer $H = 2\left(\varphi(K,I)\frac{I}{\varphi(I,I)} + \varphi(K,J+K)\frac{J+K}{\varphi(J+K,J+K)}\right)$.

   Bien.

8. 2 pt * Montrer que $\mathscr{B} = (I,J,H)$ est une base de E.

   Plusieurs bonnes réponses. Plusieurs pensent bien à la dimension mais attention, ici il n'est pas forcément évident que les vecteurs de $\mathscr{B}$ sont tous des vecteurs de E, ce qui doit être nécessairement justifié (si jamais vous n'avez pas directement montré que $\mathscr{B}$ est génératrice de E).

9. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ * On pose $E^{\perp} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \varphi(I,M) = \varphi(J,M) = \varphi(H,M) = 0\}$. Démontrer que $E^{\perp}$ est une droite vectorielle.

   Plusieurs bonnes réponses. Quelques forçages erronés.

10. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ * Montrer que $E^{\perp}$ est un supplémentaire de E.

    Bien, plusieurs belles réponses lorsqu'elle est traitée.

11. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ * Montrer que pour tout $(M,N) \in E^{\perp} \times E$, $\varphi(M,N) = 0$.

    Bien aussi lorsqu'elle est traitée.

Soit p un projecteur appartenant à $\mathcal{E}$ distinct de l'identité et de l'application nulle. Il existe donc deux droites vectorielles distinctes $D_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $D_2 = \mathrm{Vect}(e_2)$, avec (e_1, e_2) une base de $\mathbb{R}^2$, telles que p soit la projection sur D_1 parallèlement à D_2.

12. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ * Ecrire A la matrice de p dans la base (e_1, e_2) et calculer la trace de A.

    Vous avez été gênés par la faute de frappe. Très peu de tentatives, aucune bonne réponse.

13. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ * Soit B la matrice de p dans une autre base. Montrer que $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)$.

    Non traitée, un seul début de réponse intéressant.

14. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire quelles sont les matrices $M(a,b,c)$ pour lesquelles $f_{a,b,c}$ est un projecteur (distinct de l'identité et de l'application nulle).

    Non traitée.

Partie 3 : Espaces stables par produit $\boxed{\textbf{22 pt}}$

15. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Le produit de deux matrices de E est-il toujours une matrice de E ?

    Beaucoup font le calcul général et affirme que l'équation à quatre inconnues « ne marche pas » sans le démontrer (et ce qui est faux d'ailleurs pour quelques valeurs des coefficients). Pour démontrer que l'assertion est fausse, il faut construire proprement un véritable exemple concret. Une ou deux bonnes réponses.

16. L'objectif de cette question est de déterminer les droites vectorielles Δ de E qui sont stables par produit. Soit Δ une droite vectorielle engendrée par $M_0 = M(a_0, b_0, c_0)$.

    (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Démontrer que Δ est stable par produit si et seulement si $M_0^2 \in \Delta$.
    Deux trois implications correctes mais aucune réciproque n'a été démontrée.

    (b) On suppose que $M_0^2 \in \Delta$.

    i. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Justifier qu'il existe un réel λ tel que $M_0^2 = \lambda M_0$.
    Elémentaire et pourtant une ou deux réponses uniquement.

    ii. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Démontrer que si $\lambda = 0$, alors M_0 est proportionnelle à J ou K.
    Deux bonnes réponses, non traitée sinon.

    iii. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ On suppose que $\lambda \neq 0$. On pose $M_0' = \frac{1}{\lambda} M_0$. Démontrer que M_0' est la matrice canoniquement associée à un projecteur.
    Non traitée.

    (c) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Conclure.
    La question la plus intéressante de cette partie. Non traitée.

17. L'objectif de cette question est de déterminer les plans vectoriels de E stables par produit.

    (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Vérifier que le plan vectoriel engendré par I et J est stable par produit.
    Des questions de fin de sujet mais très abordables pourtant ! Deux ou trois étudiants l'ont traité globalement avec succès.

(b) **2 pt** Le plan vectoriel engendré par J et K est-il stable par produit ?

Là aussi un exemple concret était attendu.

(c) **2 pt** Vérifier que l'ensemble des matrices symétriques de E est un plan vectoriel stable par produit.

Deux ou trois bonnes réponses. Attention cependant à bien vérifier que cet ensemble est un plan vectoriel. Une seule réponse complète.

(d) **2 pt** Soit $(b, c) \neq (0, 0)$. Démontrer que le sous-espace vectoriel engendré par I et $bJ + cK$ est stable par produit.

Deux ou trois bonnes réponses.

(e) **2 pt** Démontrer que les seuls plans vectoriels de E stables par produit sont ceux de la question précédente.

Là aussi une dernière question d'un niveau plus élevée. Non traitée.