Epreuve de mathématiques 11
2024-2025

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Variables aléatoires

On considère deux urnes U et V. Initialement, l'urne U contient deux jetons rouges indiscernables et l'urne V contient deux autres jetons verts indiscernables. A chaque instant, on pioche un jeton dans l'urne U et un jeton dans l'urne V. On permute alors ces deux jetons, en rangeant celui venant de l'urne U dans l'urne V et celui provenant de l'urne V dans l'urne U. A chaque étape, chacune des urnes contient donc toujours deux jetons.

Partie 1 : Comportement initial

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note U_k le nombre de jetons verts présents dans l'urne U à l'étape k.

1. Préciser les lois de U_0, U_1 puis U_2.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Pour tout $(i, j) \in [\![0; 2]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(U_{k+1} = j \mid U_k = i)$.
   On admettra que $\mathbb{P}(U_k = i)$ est toujours non négligeable pour $k \geqslant 2$.
3. Déterminer la loi de $Z = (U_2, U_3)$. Les variables U_2 et U_3 sont-elles indépendantes ?
4. Préciser la loi de U_3.
5. Calculer $\mathrm{Cov}(U_2, U_3)$.
6. Calculer $\mathbb{P}(U_2 = 1 \mid U_3 = 1)$.

Partie 2 : Nombre de passage à l'équilibre

On dit que le système des deux urnes est à l'équilibre lorsque chaque urne possède un jeton rouge et un jeton vert i.e. lorsque $U_1 = 1$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire retournant 1 si $U_k = 1$ et 0 sinon. On pose également $p_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$, le nombre de fois où les urnes ont été équilibrées durant les n premières étapes.

7. Déterminer les lois de X_0, X_1 et X_2.
8. Déterminer pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(S_n = n)$.
9. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{k+1} = 1 - \frac{p_k}{2}$.
10. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k.
11. Quel est la loi de X_k ? Préciser son espérance et sa variance.
12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pourquoi S_n n'est pas nécessairement une loi binomiale ?
13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}(S_n)$.
14. Déterminer un équivalent simple de $\mathbb{E}(S_n)$. Quelle serait alors asymptotiquement, pour $n \to +\infty$, la proportion moyenne de passages du système à l'équilibre ?

Partie 3 : La matrice stochastique associée

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $W_k = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(U_k = 0) \\ \mathbb{P}(U_k = 1) \\ \mathbb{P}(U_k = 2) \end{bmatrix}$. On définit également $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $W_{k+1} = AW_k$.
16. Préciser $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
17. Montrer qu'il existe $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.
18. Calculer $W_1' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(W_1)$.
19. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $W_k' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(W_k)$ puis W_k.
20. Retrouver le résultat de la question 10..
21. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}(U_k)$.
22. Préciser $W_\infty = \lim\limits_{k \to +\infty} W_k$. Vérifier que $W_\infty^T = W_\infty^T A$.

Problème 2 - Géométrie

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère la surface d'équation $S : x^2 = 2yz$.

Partie 1 : Quelques points, droites et plans issus de S

On pose $A(2,1,2)$ et $B(2,2,1)$, $C(6,2,9)$ et $D(0,0,-1)$.

1. Vérifier que A, B, C, D et O sont cinq points de S.
2. Calculer $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$. Que peut-on en déduire sur les points A, B, C et D ?
3. Déterminer des équations cartésiennes et paramétriques du plan (ABC).
4. Déterminer des équations cartésiennes et paramétriques de la droite (AB).
5. Déterminer H_1 le projeté orthogonal de O sur (ABC).
6. En déduire d_1 la distance de O à (ABC).
7. Déterminer H_2 le projeté orthogonal de O sur (AB).
8. En déduire d_2 la distance de O à (AB). La comparer à d_1. Est-ce cohérent ?
9. Déterminer des équations cartésiennes et paramétriques de $\mathcal{D}$ la droite incluse dans (ABC), perpendiculaire à (AB) et passant par C.
10. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ avec S.

Partie 2 : Des génératrices de S

11. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on pose $\mathcal{D}_a$ la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j} + \frac{1}{2a}\vec{k}$. Montrer que $\mathcal{D}_a \subseteq S$.
12. Soit $\mathcal{A}$ la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{j} + \vec{k}$. On fixe $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et on considère le plan $\mathcal{P}$ contenant les droites $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}_a$.
    (a) Déterminer des équations paramétriques de $\mathcal{P}$.

(b) Montrer que $\mathcal{P} \cap S$ est l'union de deux droites dont on donnera des équations paramétriques.

Partie 3 : D'après Banque PT 2025

Pour tout $M(x_0, y_0, z_0) \in S \setminus \{O\}$, on admet que le plan tangent à la surface S au point M est le plan passant par M et dont un vecteur normal est donné par $x_0 \vec{i} - z_0 \vec{j} - y_0 \vec{k}$.
On considère Γ la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \end{cases}, \qquad t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Enfin, P_a est le plan d'équation $z = a$, $a \in \mathbb{R}$ et $\Gamma_a = S \cap P_a$.

13. Montrer que si $M(x, y, z) \in S$, alors $M'(-x, y, z) \in S$. En déduire que la surface S est symétrique par rapport à un plan dont on précisera une équation cartésienne.
14. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S au point F de coordonnées $(2, -2, -1)$ après avoir vérifié que $F \in S$.
15. Démontrer que l'ensemble des points différents de O de S en lesquels le plan tangent à S est parallèle au plan d'équation $2\sqrt{3}x + 2y + 3z = 0$ est une droite privée de O dont on donnera un vecteur directeur.
16. Existe-t-il un point de $S \setminus \{O\}$ en lequel le plan tangent à S est orthogonal au vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$?
17. Montrer que $\Gamma \subseteq S$.
18. Soit $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $M(t)$ le point de Γ de paramètre t.
    (a) Pour quelle valeur de a (dépendante de t) a-t-on $M(t) \in \Gamma_a$?
    Dans la suite de cette question, a prend cette valeur.
    (b) Déterminer $\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$.
    (c) Soit $\vec{n_1}$ un vecteur normal à P_a et $\vec{n_2}$ un vecteur normal au plan tangent à S au point $M(t)$. Déterminer $\vec{u}(t)$ un vecteur orthogonal à $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$.
    (d) Démontrer que $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux.

Partie 4 : Des sections circulaires de S

Pour tout $d \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{P}_d$ le plan d'équation $y + z = d$. On note $\mathcal{C}_d = \mathcal{P}_d \cap S$ l'intersection du plan $\mathcal{P}_d$ avec la surface S.

19. Soit $\mathcal{S}_d$ la sphère de centre 0 et de rayon d. Préciser une équation cartésienne de $\mathcal{S}_d$.
20. Montrer que $\mathcal{C}_d = \mathcal{P}_d \cap \mathcal{S}_d$.
21. Calculer la distance de O à $\mathcal{P}_d$.
22. En déduire que $\mathcal{C}_d$ est un cercle. Calculer son centre et son rayon.
23. Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_d$ est incluse dans une sphère de centre $\Omega_b(0, b, b)$ et préciser le rayon de cette sphère en fonction de b et d.

Fin de l'épreuve