Corrigé du Devoir Surveillé 11
Variables aléatoires et géométrie

Problème I - Variables aléatoires

On considère deux urnes U et V. Initialement, l'urne U contient deux jetons rouges indiscernables et l'urne V contient deux autres jetons verts indiscernables. A chaque instant, on pioche un jeton dans l'urne U et un jeton dans l'urne V. On permute alors ces deux jetons, en rangeant celui venant de l'urne U dans l'urne V et celui provenant de l'urne V dans l'urne U. A chaque étape, chacune des urnes contient donc toujours deux jetons.

Partie 1 : Comportement initial

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note U_k le nombre de jetons verts présents dans l'urne U.

1. Au tout début, on sait que l'urne U ne possède aucun jeton vert. Donc U_0 est déterministe et vaut :
$$\boxed{U_0 = 0.}$$
A l'instant 1, puisque l'urne U ne possède que des jetons rouges, on va forcément en piocher un jeton rouge. De même, on va forcément piocher un jeton vert dans l'urne V. On se retrouve donc avec l'urne U et l'urne V qui contiennent chacune un jeton rouge et un jeton vert. Par conséquent, U_1 est aussi déterministe et
$$\boxed{U_1 = 1.}$$
A l'instant 2, les choses commencent enfin à être intéressantes. Calculons $\mathbb{P}(U_2 = 0)$. Pour réaliser $U_2 = 0$, il faut enlever le jeton vert de l'urne U : 1 chance sur 2 car l'urne U possède deux jetons mais aussi il faut avoir repris le jeton rouge dans l'urne V : 1 chance sur 2 également. Les deux tirages sont supposés indépendants. Dès lors,
$$\mathbb{P}(U_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
De la même façon, pour obtenir $(U_2 = 2)$, il faut avoir enlevé le jeton rouge de l'urne U et l'avoir remplacé par le jeton vert de l'urne V :
$$\mathbb{P}(U_2 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
On peut alors ou se fatiguer à décrire les façons d'obtenir $(U_2 = 1)$ (on intervertit les deux jetons verts avec une probabilité $1/4$ ou on intervertit les deux jetons rouges avec une probabilités $1/4$) ou alors, on observe que $((U_2 = 0), (U_2 = 1), (U_2 = 2))$ forme un système complet d'évènements (incompatibles) et donc
$$\mathbb{P}(U_2 = 1) = 1 - \mathbb{P}(U_2 = 0) - \mathbb{P}(U_2 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$
Conclusion, la loi de U_2 est donnée par
$$\boxed{\mathbb{P}(U_2 = 0) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(U_2 = 1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(U_2 = 2) = \frac{1}{4}.}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Commençons par prendre $i = 0$ et supposer $U_k = 0$. Alors à l'étape k l'urne U contient deux jetons rouges et aucun jeton vert. Par conséquent l'urne V contient deux jetons verts et aucun jeton rouge. On se retrouve dans la même configuration qu'à l'étape 0, donc de même que pour U_1, on a $U_{k+1} = 1$ dans ce cas :
$$\mathbb{P}(U_{k+1} = 1 \mid U_k = 0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(U_{k+1} = 0 \mid U_k = 0) = \mathbb{P}(U_{k+1} = 2 \mid U_k = 0) = 0.$$

Supposons maintenant que $U_k = 1$. Alors, comme pour passer de U_1 à U_2, on a

$$\mathbb{P}\left(U_{k+1}=0 \mid U_k=1\right)=\mathbb{P}\left(U_{k+1}=2 \mid U_k=1\right)=\frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(U_{k+1}=1 \mid U_k=1\right)=\frac{1}{2}.$$

Enfin, si $U_k = 2$, alors l'urne U ne possède que des jetons verts et l'urne V que des jetons rouges, on va donc forcément échanger un jeton vert contre un jeton rouge et dans ce cas, $U_{k+1} = 1$:

$$\mathbb{P}\left(U_{k+1}=1 \mid U_k=2\right)=1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(U_{k+1}=0 \mid U_k=2\right)=\mathbb{P}\left(U_{k+1}=2 \mid U_k=2\right)=0.$$

Résumons ces résultats par un tableau : $\mathbb{P}\left(U_{k+1}=j \mid U_k=i\right)$ est donné par

$j\backslash i$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
2	0	$\frac{1}{4}$	0

3. Pour tout $i \in [\![0;2]\!]$, on a par la question 1. $\mathbb{P}(U_2 = i) \neq 0$. Donc pour tout $(i,j) \in [\![0;2]\!]^2$,

$$\mathbb{P}\left((U_3=j)\cap(U_2=i)\right)=\mathbb{P}\left(U_3=j \mid U_2=i\right)\mathbb{P}\left(U_2=i\right).$$

Donc par la question précédente pour $k = 2$ et les valeurs de $\mathbb{P}(U_2 = i)$ données à la question 1., on obtient par exemple,

$$\mathbb{P}\left((U_3=0)\cap(U_2=1)\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

En procédant de même pour les autres valeurs :

$U_3\backslash U_2$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{8}$	0

La famille $(U_3 = 2)_{i\in[\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles). Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(U_3=0)=\sum_{i=0}^{2}\mathbb{P}\left((U_3=0)\cap(U_2=i)\right)=0+\frac{1}{8}+0=\frac{1}{8}.$$

Donc $\mathbb{P}(U_3=0)\,\mathbb{P}(U_2=0)=\frac{1}{8}\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$. Or par le tableau précédent, on a $\mathbb{P}\left((U_3=0)\cap(U_2=0)\right)=0$. Donc

$$\mathbb{P}\left((U_3=0)\cap(U_2=0)\right)\neq\mathbb{P}(U_3=0)\,\mathbb{P}(U_2=0).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les variables } U_2 \text{ et } U_3 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

4. La famille $(U_2 = i)_{i\in[\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles), donc par la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(U_3=j)=\sum_{i=0}^{2}\mathbb{P}\left((U_3=j)\cap(U_2=i)\right).$$

Il suffit donc de sommer les colonnes du tableau précédent :

i	$\mathbb{P}(U_3=i)$
0	$1/8$
1	$3/4$
2	$1/8$

5. Par définition, on a
$$\text{Cov}\left(U_2, U_3\right) = \mathbb{E}\left(U_2U_3\right) - \mathbb{E}\left(U_2\right)\mathbb{E}\left(U_3\right).$$
On a donc par la loi obtenue à la question précédente,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(U_2U_3\right) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} ij\mathbb{P}\left(\left(U_2 = i\right)\cap\left(U_3 = j\right)\right)\\ &= 0 + 1\times\mathbb{P}\left(\left(U_2 = 1\right)\cap\left(U_3 = 1\right)\right) + 2\times\mathbb{P}\left(\left(U_2 = 1\right)\cap\left(U_3 = 2\right)\right)\\ &\qquad + 2\times\mathbb{P}\left(\left(U_2 = 2\right)\cap\left(U_3 = 1\right)\right) + 4\times\mathbb{P}\left(\left(U_2 = 2\right)\cap\left(U_3 = 2\right)\right)\\ &= \frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{1}{4} + 4\times 0\\ &= 1.\end{aligned}$$
De plus par la question précédente,
$$\mathbb{E}\left(U_3\right) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{4} + 2\times\frac{1}{8} = 1.$$
De plus par la question 1., on a
$$\mathbb{E}\left(U_2\right) = 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{4} = 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{Cov}\left(U_2, U_3\right) = 1 - 1 = 0.}$$
Les variables U_2 et U_3 sont donc non corrélées mais ne sont pas indépendantes pour autant.

6. Par ce qui précède, on a $\mathbb{P}\left(U_2 = 1\right) \neq 0$ et $\mathbb{P}\left(U_3 = 1\right) \neq 0$. Donc par la formule de Bayes,
$$\mathbb{P}\left(U_2 = 1 \mid U_3 = 1\right) = \frac{\mathbb{P}\left(U_3 = 1 \mid U_2 = 1\right)\mathbb{P}\left(U_2 = 1\right)}{\mathbb{P}\left(U_3 = 1\right)}.$$
Or par la question 2. avec $k = 2$, on a $\mathbb{P}\left(U_3 = 1 \mid U_2 = 1\right) = \frac{1}{2}$ et par ce qui précède, $\mathbb{P}\left(U_3 = 1\right) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}\left(U_2 = 1\right) = \frac{1}{2}$. Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}\left(U_2 = 1 \mid U_3 = 1\right) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.}$$

Partie 2 : Nombre de passage à l'équilibre

On dit que le système des deux urnes est à l'équilibre lorsque chaque urne possède un jeton rouge et un jeton vert i.e. lorsque $U_1 = 1$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire retournant 1 si $U_k = 1$ et 0 sinon. On pose également $p_k = \mathbb{P}\left(X_k = 1\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$, le nombre de fois où les urnes ont été équilibrées durant les n premières étapes.

7. Puisque U_0 est toujours nulle, alors $\boxed{X_0 = 0}$. A contrario, comme $U_1 = 1$, on a $\boxed{X_1 = 1}$. La variable X_2 est, elle, non constante et puisque les seules issues de X_2 sont 0 ou 1, on en déduit que X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre
$$p_2 = \mathbb{P}\left(X_2 = 1\right) = \mathbb{P}\left(U_2 = 1\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{par la question 1.}$$
Conclusion,
$$\boxed{X_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Puisque $X_0 = 0$, on a
$$\mathbb{P}(S_n = n) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{n} X_k = n\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = n\right).$$
Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \in \{0;1\}$, pour que $S_n = n$, il faut et il suffit d'avoir $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1$. Ainsi,
$$\mathbb{P}(S_n = n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (U_k = 1)\right).$$
Par la formule des probabilités composées :
$$\mathbb{P}(S_n = n) = \left[\prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}\left(U_k = 1 \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} (U_i = 1)\right)\right] \mathbb{P}(U_1 = 1).$$
Or l'état des urnes à l'étape k ne dépend que de celui de l'étape $k-1$ et par la question 2.,
$$\mathbb{P}\left(U_k = 1 \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{i-1} (U_i = 1)\right) = \mathbb{P}(U_k = 1 \mid U_{k-1} = 1) = \frac{1}{2}.$$
Par conséquent,
$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}} \times 1 = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

9. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. On sait que $(U_k = i)_{i \in [\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'événements (incompatibles) non négligeables. Donc par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned} p_{k+1} = \mathbb{P}(U_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(U_{k+1} = 1 \mid U_k = 0)\,\mathbb{P}(U_k = 0) + \mathbb{P}(U_{k+1} = 1 \mid U_k = 1)\,\mathbb{P}(U_k = 1) \\ + \mathbb{P}(U_{k+1} = 1 \mid U_k = 2)\,\mathbb{P}(U_k = 2). \end{aligned}$$
Donc par la question 2.,
$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \mathbb{P}(U_k = 0) + \mathbb{P}(U_k = 2) + \frac{1}{2} p_k \\ &= 1 - \mathbb{P}(U_k = 1) + \frac{p_k}{2} \\ &= 1 - p_k + \frac{p_k}{2} \\ &= 1 - \frac{p_k}{2}. \end{aligned}$$
Si $k = 0$, alors $p_1 = 1 = 1 - 0 = 1 - p_0$, ok. Si $k = 1$, $p_2 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{p_1}{2}$. La formule reste vraie. Conclusion,
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad p_{k+1} = 1 - \frac{p_k}{2}.}$$

10. Par la question précédente, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$, on a $\omega = 1 - \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{2}{3}$. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_k = p_k - \frac{2}{3}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$q_{k+1} = p_{k+1} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{p_k}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{p_k}{2} = \frac{\frac{2}{3} - p_k}{2} = -\frac{q_k}{2}.$$
Donc $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$p_k = q_k + \frac{2}{3} = \frac{(-1)^k}{2^k} q_0 + \frac{2}{3} = \frac{(-1)^k}{2^k}\left(p_0 - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad p_k = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right).}$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}$. La variable aléatoire X_k n'ayant que deux issues 0 et 1 est une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_k = 1) = p_k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad X_k \sim \mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right)\right).}$$

Donc en particulier

$$\boxed{\mathbb{E}(X_k) = p_k = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right).}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_k) &= p_k(1 - p_k) \\
&= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right)\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{(-1)^k}{2^k}\right) \\
&= \frac{2}{9}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right)\left(1 + 2\frac{(-1)^k}{2^k}\right) \\
&= \frac{2}{9}\left(1 + 2\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^k}{2^k} + 2\frac{1}{2^{2k}}\right) \\
&= \frac{2}{9}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^k} + 2\frac{1}{2^{2k}}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{V}(X_k) = \frac{2}{9}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^k} + 2\frac{1}{2^{2k}}\right).}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les variables X_k n'étant pas indépendantes, on ne peut pas conclure directement que S_n est une loi binomiale.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de la somme, puis la question précédente,

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right) = \frac{2(n+1)}{3} - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

On reconnait une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2} \neq 1$. Donc

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{2(n+1)}{3} - \frac{2}{3}\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2(n+1)}{3} - \frac{4}{9}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) = \frac{2(n+1)}{3} + \frac{4}{9}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right).$$

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \frac{2(n+1)}{3} + \frac{4}{9}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right).}$$

14. On a $\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{2n}{3}\right)$. Donc par la question précédente,

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2n}{3}.}$$

Asymptotiquement, sur n étapes, en moyenne, les $2/3$ correspondent à un état à l'équilibre $U_1 = 1$.

Partie 3 : La matrice stochastique associée

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $W_k = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(U_k = 0) \\ \mathbb{P}(U_k = 1) \\ \mathbb{P}(U_k = 2) \end{bmatrix}$. On définit également $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Puisque $(U_k = i)_{i \in [\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements non négligeables, par la formule des probabilités totales,

$$W_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(U_k = 0) \\ \mathbb{P}(U_k = 1) \\ \mathbb{P}(U_k = 2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbb{P}(U_{k+1}=0 \mid U_k=0)\mathbb{P}(U_k=0)+\mathbb{P}(U_{k+1}=0 \mid U_k=1)\mathbb{P}(U_k=1)+\mathbb{P}(U_{k+1}=0 \mid U_k=2)\mathbb{P}(U_k=2) \\ \mathbb{P}(U_{k+1}=1 \mid U_k=0)\mathbb{P}(U_k=0)+\mathbb{P}(U_{k+1}=1 \mid U_k=1)\mathbb{P}(U_k=1)+\mathbb{P}(U_{k+1}=1 \mid U_k=2)\mathbb{P}(U_k=2) \\ \mathbb{P}(U_{k+1}=2 \mid U_k=0)\mathbb{P}(U_k=0)+\mathbb{P}(U_{k+1}=2 \mid U_k=1)\mathbb{P}(U_k=1)+\mathbb{P}(U_{k+1}=2 \mid U_k=2)\mathbb{P}(U_k=2) \end{bmatrix}.$$

Donc par la question 1.

$$W_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 \times \mathbb{P}(U_k = 0) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(U_k = 1) + 0 \times \mathbb{P}(U_k = 2) \\ 1 \times \mathbb{P}(U_k = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(U_k = 1) + 1 \times \mathbb{P}(U_k = 2) \\ 0 \times \mathbb{P}(U_k = 0) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(U_k = 1) + 1 \times \mathbb{P}(U_k = 2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{P}(U_k = 0) \\ \mathbb{P}(U_k = 1) \\ \mathbb{P}(U_k = 2) \end{bmatrix}.$$

De plus, par la question 1. $W_2 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = AW_1$ et $W_1 = AW_0$. Donc la formule reste vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad W_{k+1} = AW_k.}$$

16. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{4} \\ x + \frac{y}{2} + z \\ \frac{y}{4} \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \left(\frac{y}{4}, x + \frac{y}{2} + z, \frac{y}{4}\right). \end{array}}$$

17. On cherche $(e_1, e_2, e_3) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3$ telle que

$$f(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}, \qquad f(e_2) = e_2, \qquad f(e_3) = -\frac{e_3}{2}.$$

Cherchons e_1 tel que $f(e_1) = 0$ i.e. $e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{y}{4}, x + \frac{y}{2} + z, \frac{y}{4}\right) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc
$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

Posons $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Cherchons maintenant e_2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) = (x,y,z) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{y}{4}, x + \frac{y}{2} + z, \frac{y}{4}\right) = (x,y,z) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - \frac{y}{4} = 0 \\ x - \frac{y}{2} + z = 0 \\ \frac{y}{4} - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{y}{4} \\ x - \frac{y}{2} + z = 0 \\ z = \frac{y}{4} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{y}{4} \\ \frac{y}{4} - \frac{y}{2} + \frac{y}{4} = 0 \\ z = \frac{y}{4} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{4} = z
\end{aligned}$$

Donc
$$\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Posons $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Enfin, cherchons e_3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) = -\frac{1}{2}(x,y,z) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{y}{4}, x + \frac{y}{2} + z, \frac{y}{4}\right) = \left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}, -\frac{z}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 0 \\ x + y + z = 0 \\ \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) = -\frac{1}{2}(x,y,z) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{y}{2} \\ x + y + z = 0 \\ z = -\frac{y}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{y}{2} \\ -\frac{y}{2} + y - \frac{y}{2} = 0 \\ z = -\frac{y}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\frac{y}{2} = z.
\end{aligned}$$

Donc
$$\operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Posons $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Montrons maintenant que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Posons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons son rang :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(P) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} && L_3 - 2L_2 && = 3.
\end{aligned}$$

Donc P est inversible et $\mathscr{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

et

$$\boxed{D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.}$$

18. Soit $W_1' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(W_1)$. On sait que $W_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Posons $W_1' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Par la formule du cours, on a

$$\begin{aligned}
W_1 = PW_1' \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4y - 2z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow \frac{L_3 + L_1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 4y - 2z = 1 \end{cases} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -6z = 1 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -y - z = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0 \\ y = -z = \frac{1}{6} \\ z = -\frac{1}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{W_1' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(W_1) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.}$$

19. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la question 15., on a

$$W_{k+1}' = P^{-1} W_{k+1} = P^{-1} A W_k = P^{-1} A P W_k'.$$

Or par la formule de changement de base, $P^{-1}AP = D$ et donc

$$W_{k+1}' = DW_k'.$$

Donc par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, **attention c'est faux en $k = 0$! ! !**

$$W_k' = D^{k-1} W_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^{k-1} \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \end{bmatrix}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad W_k' = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \end{bmatrix}.}$$

Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$W_k = PW_k' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \\ 4 - 2\frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \\ 1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \end{bmatrix}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad W_k = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \\ 4 - 2\frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \\ 1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \end{bmatrix}.}$$

20. Par la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = \mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(U_k = 1) = \frac{1}{6}\left(4 - 2\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{6}\left(4 - 4\frac{(-1)^k}{2^k}\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right).$$

Conclusion, $\boxed{\text{on retrouve bien le résultat de la question 10.}}$

21. Par définition,

$$\mathbb{E}(U_k) = 0 \times \mathbb{P}(U_k = 0) + 1 \times \mathbb{P}(U_k = 1) + 2 \times \mathbb{P}(U_k = 2).$$

Donc par la question 19.

$$\mathbb{E}(U_k) = \frac{1}{6}\left(4 - 2\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) + \frac{2}{6}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) = 1.$$

Cela se conçoit assez bien car on observe une symétrie sur l'état 0 et l'état 2 : la variable X_k est donc « centrée en 1 » à partir du rang 1.

D'autre part, par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(U_k^2\right) &= 0^2 \times \mathbb{P}(U_k = 0) + 1^2 \times \mathbb{P}(U_k = 1) + 4 \times \mathbb{P}(U_k = 2) \\
&= \frac{1}{6}\left(4 - 2\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) + \frac{4}{6}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) \\
&= \frac{8}{6} + \frac{2}{6}\frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \\
&= \frac{1}{3}\left(4 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right).
\end{aligned}$$

D'où, par la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}(U_k) = \mathbb{E}\left(X_k^2\right) - \mathbb{E}(X_k)^2 = \frac{1}{3}\left(4 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) - 1^2 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right).$$

On vérifie notre résultat pour $k = 1$, on a $\mathbb{V}(U_k) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{-1}{1}\right) = 0$, ce qui est cohérent car U_k est constante.

Enfin, U_0 étant constante, on a $\mathbb{V}(U_0) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{V}(U_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) & \text{si } k \neq 0. \end{cases}}$$

22. Par la question 19. on a

$$W_\infty = \lim_{k \to +\infty} W_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \\ 4 - 2\frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \\ 1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{W_\infty = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}.}$$

Et donc

$$W_\infty{}^T A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1/4 & 0\\1 & 1/2 & 1\\0 & 1/4 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\end{bmatrix} = W_\infty{}^T.$$

Conclusion,

$$\boxed{W_\infty{}^T = W_\infty{}^T A.}$$

Tiens, tiens, tiens... En réalité ceci est un résultat général sur les chaînes de Markov, W_∞ est la mesure invariante (on a beau la multiplier à droite par A, on reste en W_∞). On vient donc d'établir sur un exemple que la chaîne de Markov converge vers la mesure invariante.

Alors oui je sais on aurait pu vérifier juste que $W_\infty = AW_\infty$ mais c'est un cas très particulier de cet exercice qui s'explique simplement par le fait que A est symétrique (ce qui n'est pas toujours le cas).

Problème II - Géométrie

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère la surface d'équation $S : x^2 = 2yz$.

Partie 1 : Quelques points, droites et plans issus de S

On pose $A(2,1,2)$ et $B(2,2,1)$, $C(6,2,9)$ et $D(0,0,-1)$.

1. Montrons que A, B, C, D et O sont cinq points de S. Pour le point A, on a $x = 2$, $y = 1$ et $z = 2$. Donc
$$x^2 = 4 \text{ et } 2yz = 2 \times 1 \times 2 = 4.$$
Ainsi,
$$x^2 = 2yz.$$
Donc $A \in S$. De même,
$$2^2 = 4 = 2 \times 2 \times 1.$$
Donc $B \in S$. Puis,
$$6^2 = 36 = 2 \times 2 \times 9.$$
Donc $C \in S$.
$$0^2 = 2 \times 0 \times (-1).$$
Donc $D \in S$. Enfin,
$$0^2 = 2 \times 0 \times 0.$$
Donc $O \in S$. Conclusion,
$$\boxed{(A, B, C, D, O) \in S^5.}$$

2. Calculons $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ et interprétons. On a
$$\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC}\begin{bmatrix}4\\1\\7\end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{AD}\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\end{bmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) &= \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & -4 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\
&= 2\times 4\times \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \end{matrix} \qquad = (-1)\times 8 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

On peut observer alors que $L_1 = L_2$ ou $C_1 = -2C_2$ pour en déduire que le déterminant est nul. Sinon,

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = -8\,(-2+2) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = 0.}$$

On en déduit que la famille $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ est liée autrement dit les **trois** vecteurs sont coplanaires. Conclusion,

$$\boxed{\text{les quatre points } A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ sont coplanaires i.e. inclus dans un même plan.}}$$

3. Déterminons des équations cartésiennes et paramétriques du plan (ABC). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs **non colinéaires** de (ABC). De plus $A\,(2,1,2)$ est un point de (ABC). On en déduit que des équations paramétriques de (ABC) sont données par

$$\boxed{(ABC)\ :\ \begin{cases} x = 2+4s \\ y = 1+t+s \\ z = 2-t+7s \end{cases},\ (t,s)\in\mathbb{R}^2.}$$

Toujours plein de méthodes,

- on peut observer que $M \in (ABC)$ si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}\right) = 0$,
- on peut renverser le système précédent et l'échelonner pour obtenir une équation de compatibilité,
- calculer le vecteur normal et faire un produit scalaire.

Appliquons la dernière méthode :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

est un vecteur normal donc $\overrightarrow{n} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ est un vecteur normal de (ABC). Soit $M\,(x,y,z)$ un point de l'espace. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} M\in(ABC) & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \\ & \Leftrightarrow & \left\langle \overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow & \left\langle \begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow & 2x-4-y+1-z+2=0 \\ & \Leftrightarrow & 2x-y-z-1=0. \end{array}$$

Conclusion, une équation cartésienne de (ABC) est donnée par

$$\boxed{(ABC)\ :\ 2x-y-z-1=0.}$$

4. Déterminons des équations cartésiennes et paramétriques de la droite (AB). Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est directeur de la droite (AB) et $A(2,1,2)$ est un point de (AB). Donc des équations paramétriques de (AB) sont données par

$$\boxed{(AB)\ :\ \begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.}$$

Plusieurs méthodes pour les équations cartésiennes :

- en éliminant le t dans les équations,
- en cherchant des vecteurs orthogonaux,
- en utilisant la colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ avec $\overrightarrow{AB}$.

Appliquons la dernière méthode. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} M\in(AB) & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} & \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=0 & \\ & \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 & \\ & \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} -y+1-z+2 \\ x-2 \\ x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} y+z-3=0 \\ x-2=0 \\ x-2=0 \end{cases} & \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x-2=0 \\ y+z-3=0 \end{cases} & L_1\leftrightarrow L_2 \text{ et } L_3=L_2. \end{array}$$

Conclusion, des équations cartésiennes de (AB) sont données par

$$\boxed{(AB)\ :\ \begin{cases} x-2=0 \\ y+z-3=0 \end{cases}.}$$

5. Déterminons H_1 le projeté orthogonal de O sur (ABC). Puisque $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ est un vecteur normal de (ABC) et $A \in (ABC)$, on observe que

$$\begin{aligned}
H_1 &= O + \frac{\left\langle \overrightarrow{OA}, \vec{n} \right\rangle \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}{4+1+1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4-1-2}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion, les coordonnées du point H_1 sont données par

$$\boxed{H_1\,(1/3, -1/6, -1/6)\,.}$$

6. Déduisons-en d_1 la distance de O à (ABC). On a $d_1 = \|OH_1\|$. Donc par la question précédente,

$$d_1 = \left\| \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{4+1+1}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{d_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}.}$$

7. Déterminons H_2 le projeté orthogonal de O sur (AB). Puisque $A \in (AB)$ et $\overrightarrow{AB}$ est directeur de (AB) alors,

$$\begin{aligned}
H_2 &= A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB} \right\rangle \overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{1+1} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-1+2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées de H_2 sont

$$\boxed{H_2\,(2, 3/2, 3/2)\,.}$$

8. Déduisons-en d_2 la distance de O à (AB), comparons-la à d_1 et discutons la cohérence. On a $d_2 = \left\|\overrightarrow{OH_2}\right\|$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} d_2 &= \left\|\begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{16+9+9} \\ &= \frac{\sqrt{34}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{17}{2}}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d_2 = \sqrt{\frac{17}{2}}.}$$

On observe alors que $d_2 = \sqrt{\frac{17}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{1}{6}} = d_1$.

$$\boxed{d_2 \geqslant d_1.}$$

En effet puisque $(AB) \subset (ABC)$, alors par définition de la distance on a bien

$$\boxed{d_1 = \min\{OM \mid M \in (ABC)\} \leqslant \min\{OM \mid M \in (AB)\} = d_2.}$$

Cela est donc bien cohérent.

9. Déterminons des équations cartésiennes et paramétriques $\mathcal{D}$ la droite incluse dans (ABC), perpendiculaire à (AB) et passant par C. Puisque $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à (AB), alors $\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est normal à $\mathcal{D}$. Puisque $\vec{n}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est normal à (ABC) et $\mathcal{D}$ est inclus dans (ABC) alors $\vec{n}$ est aussi normal à $\mathcal{D}$. Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que leur produit vectoriel est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Dès lors $\vec{u}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Or $C(6,2,9) \in \mathcal{D}$. Donc des équations paramétriques de $\mathcal{D}$ sont données par

$$\boxed{\begin{cases} x = 6+t \\ y = 2+t \\ 9+t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $\vec{u}$ et $C \in \mathcal{D}$, on en déduit alors que, pour $M(x,y,z)$ un point,

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left\langle \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \overrightarrow{CM}, \vec{n} \right\rangle = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left\langle \begin{bmatrix} x-6 \\ y-2 \\ z-9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{bmatrix} x-6 \\ y-2 \\ z-9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y-z+7=0 \\ 2x-y-z-1=0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ sont données par

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} y-z+7=0 \\ 2x-y-z-1=0. \end{cases}}$$

10. Déterminons l'intersection de $\mathcal{D}$ avec S. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} \cap S \quad &\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 6+t \\ y = 2+t \\ z = 9+t \\ x^2 = 2yz \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 6+t \\ y = 2+t \\ z = 9+t \\ (6+t)^2 = 2(2+t)(9+t) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 6+t \\ y = 2+t \\ z = 9+t \\ t^2+12t+36 = 2\left(t^2+11t+18\right) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 6+t \\ y = 2+t \\ z = 9+t \\ t^2+10t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t=0 \\ x=6 \\ y=2 \\ z=9 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} t=-10 \\ x=-4 \\ y=-8 \\ z=-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = C(6,2,9) \quad \text{OU} \quad M = E(-4,-8,-1).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} \cap S = \{C(6,2,9), E(-4,-8,-1)\}.}$$

Partie 2 : Des génératrices de S

11. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on pose $\mathcal{D}_a$ la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j} + \frac{1}{2a}\vec{k}$. Montrons que $\mathcal{D}_a \subset S$.

    Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{D}_a$. Alors, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

    $$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + at \\ z = 0 + \frac{t}{2a} \end{cases}.$$

    Dès lors, on a $x^2 = t^2$ et $2yz = 2at \times \frac{t}{2a} = t^2$. Donc $x^2 = 2yz$. Ainsi, $M \in S$. Conclusion,

    $$\boxed{\mathcal{D}_a \subset S.}$$

12. Soit $\mathcal{A}$ la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{j} + \vec{k}$. On fixe $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et on considère le plan $\mathcal{P}$ contenant les droites $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}_a$.

    (a) Déterminons des équations paramétriques de $\mathcal{P}$. Puisque $\mathcal{A}$ est incluse dans $\mathcal{P}$, alors $\vec{j} + \vec{k}$ est UN vecteur directeur de $\mathcal{P}$. De même puisque $\mathcal{D}_a$ est incluse dans $\mathcal{P}$, alors

    $$\vec{i} + a\vec{j} + \frac{1}{2a}\vec{k} = \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}}\vec{k} = \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

    est directeur de $\mathcal{P}$. On note que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Enfin, $O \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}$. Donc des équations paramétriques de $\mathcal{P}$ sont données par

    $$\boxed{\mathcal{P} : \begin{cases} x = s \\ y = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ z = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \end{cases}, \ (t, s) \in \mathbb{R}^2.}$$

    (b) Montrons que $\mathcal{P} \cap S$ est l'union de deux droites dont on donnera des équations paramétriques. Soit $M(x, y, z)$. On a

    $$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \cap S \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = s \\ y = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ z = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ x^2 = 2yz \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = s \\ y = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ z = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ s^2 = 2\left(t + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = s \\ y = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ z = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ s = \pm\sqrt{2}\left(t + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{2}t + s\right) \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} \cap S \quad & \Leftrightarrow \quad \exists\,(s,t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = s \\ y = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ z = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ s = \sqrt{2}t + s \ \text{ OU } \ s = -\sqrt{2}t - s \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\,(s,t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = s \\ y = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ z = t + \frac{s}{\sqrt{2}} \\ t = 0 \ \text{ OU } \ t = -\sqrt{2}s \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = s \\ y = \frac{s}{\sqrt{2}} \\ z = \frac{s}{\sqrt{2}} \end{cases} \ \text{ OU } \ \begin{cases} x = s \\ y = -\sqrt{2}s + \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ z = -\sqrt{2}s + \frac{\sqrt{2}}{2}s \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = s \\ y = \frac{s}{\sqrt{2}} \\ z = \frac{s}{\sqrt{2}} \end{cases} \ \text{ OU } \ \begin{cases} x = s \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}s = -\frac{s}{\sqrt{2}} \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2}s = -\frac{s}{\sqrt{2}} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists \tilde{s} = \frac{s}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \sqrt{2}\tilde{s} \\ y = \tilde{s} \\ z = \tilde{s} \end{cases} \ \text{ OU } \ \begin{cases} x = \sqrt{2}\tilde{s} \\ y = -\tilde{s} \\ z = -\tilde{s} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad M \in \operatorname{Vect}\left(\sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) \ \text{ OU } \ M \in \operatorname{Vect}\left(\sqrt{2}\,\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right).
\end{aligned}$$

Dès lors, $\mathcal{P} \cap S$ est l'union de deux droites passant par O et de vecteur directeur $\sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\sqrt{2}\,\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$:

$$\boxed{\mathcal{P} \cap S = \operatorname{Vect}\left(\sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) \cup \operatorname{Vect}\left(\sqrt{2}\,\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right).}$$

Partie 3 : D'après Banque PT 2025

Pour tout $M\,(x_0, y_0, z_0) \in S \setminus \{O\}$, on admet que le plan tangent à la surface S au point M est le plan passant par M et dont un vecteur normal est donné par $x_0\,\vec{i} - z_0\,\vec{j} - y_0\,\vec{k}$.
On considère Γ la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \end{cases} \quad , \quad t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Enfin, P_a est le plan d'équation $z = a$, $a \in \mathbb{R}$ et $\Gamma_a = S \cap P_a$.

13. Montrons que si $M\,(x, y, z) \in S$, alors $M'\,(-x, y, z) \in S$ et déduisons-en que la surface S est symétrique par rapport à un plan dont on précisera une équation cartésienne.

    Soit $M\,(x, y, z) \in S$. Alors, $x^2 = 2yz$. Donc $(-x)^2 = 2yz$. Donc $M'\,(-x, y, z) \in S$. Conclusion,

    $$\boxed{M\,(x, y, z) \in S \ \Rightarrow \ M'\,(-x, y, z) \in S.}$$

    On en déduit que

    $$\boxed{S \text{ est symétrique par la symétrie par rapport au plan } (yOz) \text{ i.e. d'équation } x = 0.}$$

14. Déterminons une équation cartésienne du plan tangent à S au point F de coordonnées $(2,-2,-1)$ après avoir vérifié que $F \in S$. On a $x_0 = 2$, $y_0 = -2$, $z_0 = -1$ donc $x_0^2 = 4 = 2(-2)(-1) = 2y_0z_0$. Donc
$$\boxed{F \in S.}$$
Notons $\mathcal{P}_F$ le plan tangent à S au point F. Par définition, on a $\overrightarrow{n}_F = x_0\overrightarrow{i} - z_0\overrightarrow{j} - y_0\overrightarrow{k} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}_F$. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. On a
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P}_F \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{n}_F \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x-2 \\ y+2 \\ z+1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x + y + 2z = 0. \end{aligned}$$
Conclusion, une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_F$ est donné par
$$\boxed{\mathcal{P}_F : 2x + y + 2z = 0.}$$

15. Démontrons que l'ensemble des points différents de O de S en lesquels le plan tangent à S est parallèle au plan d'équation $2\sqrt{3}x+2y+3z = 0$ est une droite privée de O dont on donnera un vecteur directeur.
Soit $M(x_0, y_0, z_0) \in S \setminus \{O\}$. Le plan tangent $\mathcal{P}_M$ à S en M a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}_M = x_0\overrightarrow{i} - z_0\overrightarrow{j} - y_0\overrightarrow{k}$. Dès lors, $\mathcal{P}_M$ est parallèle au plan $2\sqrt{3}x + 2y + 3z = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{n}_M$ est colinéaire à $2\sqrt{3}\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ i.e.
$$\begin{aligned} \overrightarrow{n}_M \wedge \left(2\sqrt{3}\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ -z_0 \\ -y_0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -3z_0 + 2y_0 \\ -2\sqrt{3}y_0 - 3x_0 \\ 2x_0 + 2\sqrt{3}z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y_0 - 3z_0 = 0 \\ 3x_0 + 2\sqrt{3}y_0 = 0 \\ x_0 + \sqrt{3}z_0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 + \sqrt{3}z_0 = 0 \\ 3x_0 + 2\sqrt{3}y_0 = 0 \\ 2y_0 - 3z_0 = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 + \sqrt{3}z_0 = 0 \\ 2\sqrt{3}y_0 - 3\sqrt{3}z_0 = 0 \\ 2y_0 - 3z_0 = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 + \sqrt{3}z_0 = 0 \\ 2y_0 - 3z_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{car } L_2 = \sqrt{3}L_3 \end{aligned}$$
On récupère donc des équations cartésiennes d'une droite :
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = -\sqrt{3}z_0 \\ y_0 = \frac{3}{2}z_0 \\ z_0 = z_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_0 = -2\sqrt{3}t \\ y_0 = 3t \\ z_0 = 2t \end{cases} \end{aligned}$$

Vérifions que cette droite est bien incluse dans S :

$$\begin{cases} x_0^2 = \left(-2\sqrt{3}t\right)^2 = 12t^2 \\ 2y_0z_0 = 2\,(3t)\,(2t) = 12t^2. \end{cases}$$

Donc les points de la droite sont bien solutions. Or $M \neq O$, conclusion, l'ensemble solution est la droite $\begin{cases} x = -2\sqrt{3}t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ privée de O et dont un vecteur directeur est donné par

$$\boxed{\vec{u} = -2\sqrt{3}\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 2\,\vec{k}.}$$

16. Déterminons s'il existe un point de $S \setminus \{O\}$ en lequel le plan tangent à S est orthogonal au vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Avec les notations de la question précédente, $\mathcal{P}_M$ est orthogonal à $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ si et seulement si $\vec{n}_M$ est colinéaire à $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$:

$$\begin{aligned} \vec{0} = \vec{n}_M \wedge \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ -z_0 \\ -y_0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -z_0 + y_0 \\ -y_0 - x_0 \\ x_0 + z_0 \end{bmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_0 = z_0 \\ x_0 = -y_0 = -z_0 \\ x_0 = -z_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = -z_0 \\ y_0 = z_0. \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, on doit avoir $x_0^2 = 2y_0z_0$. Donc

$$z_0^2 = 2z_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = 0.$$

Dans ce cas, $M = O$ ce qui est exclus. Conclusion,

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de point de } S \setminus \{O\} \text{ pour lequel } \mathcal{P}_M \text{ est orthogonal à } \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.}$$

17. Montrons que $\Gamma \subset S$. Soit $M(t) \in \Gamma$, alors

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \end{cases}$$

Montrons que $M(t) \in S$. On a

$$x(t)^2 - 2y(t)z(t) = 2\cos^2(t) - 2\sin(t)\left(\frac{1}{\sin(t)} - \sin(t)\right) = 2\cos^2(t) - 2 + 2\sin^2(t) = 2 - 2 = 0.$$

Donc $x(t)^2 = 2y(t)z(t)$. Donc $M(t) \in S$. Conclusion,

$$\boxed{\Gamma \subset S.}$$

18. Soit $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $M(t)$ le point de Γ de paramètre t.

(a) Déterminons pour quelle valeur de a (dépendante de t) on a $M(t) \in \Gamma_a$. Puisque $M(t) \in \Gamma$, par la question précédente, on sait que $M(t) \in S$. Dès lors, puisque $\Gamma_a = S \cap P_a$,

$$M(t) \in \Gamma_a \quad \Leftrightarrow \quad M(t) \in P_a \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t).$$

Conclusion,

$$\boxed{a = \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t).}$$

Dans la suite de cette question, a prend cette valeur.

(b) Déterminons $\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$. Les fonctions x, y et z sont dérivables sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ car $\sin(t) \neq 0$. De plus,

$$\vec{v}(t) = -\sqrt{2}\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \left(-\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} - \cos(t)\right)\vec{k}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\vec{v}(t) = -\sqrt{2}\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} - \cos(t)\left(\frac{1}{\sin^2(t)} + 1\right)\vec{k}.}$$

(c) Soit $\vec{n_1}$ un vecteur normal à P_a et $\vec{n_2}$ un vecteur normal au plan tangent à S au point $M(t)$. Déterminons $\vec{u}(t)$ un vecteur orthogonal à $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$. On note qu'il suffit de prendre leur produit vectoriel :

$$\vec{u}(t) = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2}.$$

Or P_a a pour équation $z = a$. Donc $\vec{n_1} = \vec{k}$. De plus, on sait que $\vec{n_2} = x(t)\vec{i} - z(t)\vec{j} - y(t)\vec{k} = \sqrt{2}\cos(t)\vec{i} - \left(\frac{1}{\sin(t)} - \sin(t)\right)\vec{j} - \sin(t)\vec{k}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\vec{u}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos(t) \\ \sin(t) - \frac{1}{\sin(t)} \\ -\sin(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \\ \sqrt{2}\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\vec{u}(t) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \\ \sqrt{2}\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}}$$

(d) Démontrons que $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux. Il suffit pour cela de calculer leur produit scalaire. On a

$$\begin{aligned}
\langle vvv(t), \vec{u}(t)\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t)\left(\frac{1}{\sin^2(t)} + 1\right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \\ \sqrt{2}\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= -\sqrt{2} + \sqrt{2}\sin^2(t) + \sqrt{2}\cos^2(t) + 0 \\
&= -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les vecteurs } \vec{u}(t) \text{ et } \vec{v}(t) \text{ sont orthogonaux.}}$$

Partie 4 : Des sections circulaires de S

Pour tout $d \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{P}_d$ le plan d'équation $y+z=d$. On note $\mathcal{C}_d = \mathcal{P}_d \cap S$ l'intersection du plan $\mathcal{P}_d$ avec la surface S.

19. Soit $\mathcal{S}_d$ la sphère de centre 0 et de rayon d. Précisons une équation cartésienne de $\mathcal{S}_d$. On a
$$\mathcal{S}_d : \ (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = d^2.$$
Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{S}_d$ est
$$\boxed{\mathcal{S}_d : x^2+y^2+z^2 = d^2.}$$

20. Montrons que $\mathcal{C}_d = \mathcal{P}_d \cap \mathcal{S}_d$. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Si $M \in \mathcal{C}_d$, alors, $M \in \mathcal{P}_d \cap S$ et donc on a déjà $M \in \mathcal{P}_d$. Montrons que $M \in \mathcal{S}$. Puisque $M \in \mathcal{P}_d \cap S$, on a
$$\begin{cases} y+z=d \\ x^2 = 2yz \end{cases}.$$
En élevant la première ligne au carré, on a
$$(y+z)^2 = d^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2+2yz+z^2 = d^2.$$
Or $2yz = x^2$. Donc
$$y^2+x^2+z^2 = d^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+y^2+z^2 = d^2.$$
Donc $M \in \mathcal{S}_d$. Ainsi, $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{P}_d \cap \mathcal{S}_d$. Réciproquement, Soit $M \in \mathcal{P}_d \cap \mathcal{S}_d$. Alors, $M \in \mathcal{P}_d$. Montrons que $M \in S$. Puisque $M \in \mathcal{P}_d \cap \mathcal{S}_d$, on a
$$\begin{cases} y+z=d \\ x^2+y^2+z^2 = d^2 \end{cases}.$$
Donc
$$x^2 = d^2 - y^2 - z^2.$$
Or $y+z=d$ donc par élévation au carré, $y^2+2yz+z^2 = d^2$ ou encore $d^2-y^2-z^2 = 2yz$. Ainsi,
$$x^2 = 2yz.$$
D'où $M \in S$ et donc $M \in \mathcal{P}_d \cap S = \mathcal{C}_d$. Ainsi, $\mathcal{P}_d \cap \mathcal{S}_d \subset \mathcal{C}_d$. Conclusion,
$$\boxed{\mathcal{C}_d = \mathcal{P}_d \cap \mathcal{S}_d.}$$

21. Calculons la distance de O à $\mathcal{P}_d$. Le vecteur $\vec{n}_d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_d$ et $M_d(0,0,d)$ est un point de $\mathcal{P}_d$. Dès lors, la distance de O à $\mathcal{P}_d$ est donnée par
$$\begin{aligned} d(O, \mathcal{P}_d) &= \left\| \frac{\left\langle \overrightarrow{OM_d}, \vec{n}_d \right\rangle \vec{n}_d}{\|\vec{n}_d\|^2} \right\| \\ &= \frac{\left\langle \overrightarrow{OM_d}, \vec{n}_d \right\rangle}{\|\vec{n}_d\|} \\ &= \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\sqrt{1+1}} \\ &= \frac{d}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} d. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d\left(O, \mathcal{P}_d\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} d.}$$

22. Déduisons-en que $\mathcal{C}_d$ est un cercle puis calculons son centre et son rayon. Par la question 20. on sait que $\mathcal{C}_d$ est l'intersection d'une sphère avec un plan. Or par la question précédente,

$$d\left(O, \mathcal{P}_d\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} d.$$

D'autre part, $\mathcal{S}_d$ est une sphère de rayon $R = d$. Donc

$$d\left(O, \mathcal{P}_d\right) = \frac{d}{\sqrt{2}} < R.$$

Nécessairement,

$$\boxed{\mathcal{C}_d \text{ est un cercle inclus dans } \mathcal{P}_d.}$$

Son centre est le projeté orthogonal du centre de la sphère sur $\mathcal{P}_d$. Le centre de $\mathcal{S}_d$ est O donc Ω le centre du cercle est donné par

$$\begin{aligned}\Omega &= O + \frac{\left\langle \overrightarrow{OM_d}, \vec{n}_d \right\rangle \vec{n}_d}{\|\vec{n}_d\|^2} \\ &= \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{1+1} \\ &= \frac{d}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ d/2 \\ d/2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Le centre de la sphère est donné par $\Omega\left(0, d/2, d/2\right)$. D'autre part, on observe que $M_d\left(0,0,d\right) \in \mathcal{C}_d$. En effet, on a $y+z = 0+d = d$ donc $M_d \in \mathcal{P}_d$ et $x^2+y^2+z^2 = 0^2+0^2+d^2 = d^2$. Donc $M_d \in \mathcal{S}_d$. Ainsi, $M_d \in \mathcal{C}_d$. Dès lors, le rayon du cercle est donné par

$$r = \Omega M_d = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -d/2 \\ d/2 \end{bmatrix} \right\| = \frac{|d|}{2} \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{2}\,|d|}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{C}_d \text{ est le plan inclus dans } \mathcal{P}_d, \text{ de centre } \Omega\left(0, d/2, d/2\right) \text{ et de rayon } r = \frac{\sqrt{2}\,|d|}{2}.}$$

23. Montrons que pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_d$ est incluse dans une sphère de centre $\Omega_b\left(0,b,b\right)$ et préciser le rayon de cette sphère en fonction de b et d. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{S}'_b$ la sphère de centre Ω_b et de rayon R_b. Supposons $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{S}'_b$. Alors pour tout $M\left(x,y,z\right) \in \mathcal{C}_d$, on a

$$x^2 + (y-b)^2 + (z-b)^2 = R_b^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+y^2+z^2 - 2b\left(y+z\right) + 2b^2 = R_b^2.$$

Or $M \in \mathcal{C}_d = \mathcal{S}_d \cap \mathcal{P}_d$. Donc $x^2+y^2+z^2 = d^2$ et $y+z = d$. Ainsi,

$$d^2 - 2bd + 2b^2 = R_b^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad R_b^2 = (d-b)^2 + b^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad R_b = \sqrt{(d-b)^2+b^2},$$

car les termes sont positifs. Réciproquement, si $R_b = \sqrt{(d-b)^2 + b^2}$ et $M(x,y,z) \in \mathcal{C}_d$. Alors,

$$\begin{aligned} x^2 + (y-b)^2 + (z-b)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2b(y+z) + 2b^2 \\ &= d^2 - 2b(y+z) + 2b^2 \qquad \text{car } M \in \mathcal{S}_d \\ &= d^2 - 2bd + 2b^2 \qquad \text{car } M \in \mathcal{P}_d \\ &= (d-b)^2 + b^2 \\ &= R_b^2. \end{aligned}$$

Donc $M \in \mathcal{S}'_b$. Conclusion, pour tout $b \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathcal{C}_d \text{ est inclus dans la sphère } \mathcal{S}'_b \text{ de centre } \Omega_b(0,b,b) \text{ et de rayon } R_b = \sqrt{(d-b)^2 + b^2}.}$$