Commentaires du DS1
Logique, fonctions et bijections.

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{80}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2.4	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3.4	P3	Total	Note finale
Moyenne	-3	4,9	3,6	8,6	6,7	0,3	19,1	5,7	2,5	3,6	0,4	12,1	33,2	9,61
Sur		20	7	19	24	5	55	12	7	12	16	47	122	20

TOTAL : 122 pt

Problème I - Logique 20 pt

On pose $\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $\mathrm{Id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$.

Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les assertions suivantes :

$$\begin{array}{rl} A(f) : & « \forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \circ g = g \circ f » \\ B(f) : & « f \circ \tau = \tau \circ f » \\ C(f) : & « \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = a + n » \\ D(f) : & « f = \mathrm{Id} » \end{array}$$

On fixe $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. **2 pt** Préciser $B(f)$ uniquement à l'aide de f, d'un quantificateur et d'une variable x.

   Question qui vous a donné plus de difficulté que ce à quoi je m'attendais. Une seule bonne réponse. A revoir car elle est très abordable en réalité.

2. **2 pt** Donner la négation de $C(f)$.

   Facile et bien réussie.

3. **2 pt** Soit $I(f) : (B(f) \Rightarrow C(f))$.

   Enoncer la réciproque, la négation et la contraposée de $I(f)$.

   On détaillera les assertions utilisées.

   Bien dans l'ensemble. Quelques erreurs cependant, ce qui n'est pas normal pour une question où il faut juste réciter son cours.

4. **3 pt** Montrer que $I(f)$ est vraie.

   Vous êtes tous passé à côté de cette question. Une simple récurrence permettait d'y répondre. A refaire obligatoirement.

5. **1 pt** La contraposée de $I(f)$ est-elle vraie ? Justifier.

   Plusieurs bonnes réponses, étonnant que tout le monde n'est pas eu bon alors que c'est du cours.

6. **3 pt** Soit f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0;1[\\ x \qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que la réciproque de $I(f_0)$ est fausse.

   Un peu plus dure, aucune bonne réponse car il fallait avoir réussi la question 1.

7. **1 pt** Donner une implication reliant $A(f)$ et $B(f)$.

   Facile mais une moitié d'entre vous seulement y répond.

On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant $A(f)$.

8. **2 pt** Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \neq \text{Id}$. Montrer alors qu'il existe $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction constante que l'on choisira avec soin telle que $f \circ g \neq g \circ f$.

   Pas de bonne réponse non plus.

9. **2 pt** Quelle implication peut-on déduire de la question précédente ?

   Des éléments mais la justification n'est pas toujours très claire.

10. **2 pt** Conclure que $A(f) \Leftrightarrow D(f)$.

    Non traitée.

Problème II - Fonctions réelles **55 pt**

On considère la fonction

$$f : \quad x \mapsto x \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2}.$$

Partie 1 : Généralité **7 pt**

1. **2 pt** Exprimer $f(14)$ en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et de nombres entiers.

   Beaucoup trop d'erreurs sur cette question élémentaire. Plusieurs d'entre vous ne vont pas jusqu'au bout ou non pas lu correctement la consigne : on voulait uniquement du $\ln(2)$ et $\ln(3)$!

2. **2 pt** Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f.

   Une majorité de bonnes réponses ce qui démontre une assez bonne préparation. Quelques erreurs aussi, il faut absolument savoir répondre à ces questions de début de sujet.

3. **2+1 pt** Montrer que la fonction f est paire. Préciser alors une réduction du domaine d'étude de f.

   Quelques bonnes réponses mais un peu moins. Certains n'ont pas vu le passage $\ln(\frac{a}{b}) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. D'autres ont forcé le résultat ! Non seulement cela ne donne pas de point mais en plus cela vous sanctionne pour le reste de la copie d'avoir tenté d'arnaquer le correcteur. Enfin, plusieurs n'ont pas compris la définition de la parité. Quelques-uns oublient de dire que $\mathcal{D}$ est centré en 0 ou s'embrouille en parlant que f est centré en 0 (ce qui n'a pas de sens).

Partie 2 : Etude aux bornes **19 pt**

4. **2 pt** Calculer $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 2 \\ x > 2}} f(x)$.

   Quelques parachutages (n'apportant pas tous les points voire pas de point) et quelques belles réponses.

5. **2 pt** Montrer que pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f(x) \geqslant \frac{x}{4}$.

   Une poignée de belles réponses. Beaucoup ont passé cette question.

6. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   Assez peu ont vu le théorème de minoration (l'équivalent du théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes), on aura l'occasion d'en reparler. Certains ont forcé le calcul de la limite par une méthode directe. Je rappelle que $+\infty \times \ln(1)$ est une forme indéterminée.

7. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

   Mieux traitée.

8. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction $h : u \mapsto \ln(1+u)$.

   Ouille ! Question basique mais qui a posé problème à quelques-uns d'entre vous.

9. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer la dérivée de la fonction h en 0.

   Bien dans l'ensemble. Certains donnent juste h' sans l'évaluer en 0.

10. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que $\lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

    Plusieurs belles réponses.

11. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Vérifier que pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f(x) = x\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.

    Facile et globalement réussie. Attention certains dans leur rédaction partent du résultat !

12. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4}\right) = \frac{9}{2}$.

    Non réussie. Question plus dure.

13. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ En déduire le comportement asymptotique de f en $+\infty$.

    Bien dans l'ensemble. Certains parlent malgré tout de branche parabolique alors que ce n'est pas le cas ici. Citez proprement les questions que vous utilisez.

14. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire sans calcul le comportement asymptotique de f en $-\infty$.

    Certains pensent bien à la parité mais attention la bonne symétrie (par rapport à l'axe (Oy)) retourne la droite $y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2}$ et non $y = \frac{x}{4} + \frac{9}{2}$. Une ou deux bonnes réponses seulement.

Partie 3 : Etude de la dérivée $\boxed{24 \text{ pt}}$

15. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Justifier que f est dérivable sur $]2;+\infty[$.

    Pas toujours très clair. J'ai donné facilement le point.

16. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $x \in]2;+\infty[$

    $$f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{1}{4}.$$

    Pas mal dans l'ensemble.

17. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer le comportement asymptotique de f' en $+\infty$.

    Plusieurs bonnes réponses ici aussi.

18. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Vérifier également que pour tout $x \in]2;+\infty[$,

    $$f'(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

    Facile mais pas toujours réussie. On pouvait partir du terme de droite pour montrer A LA FIN que cela faisait $f'(x)$ mais ne partez pas de l'égalité !

19. **2 pt** En posant $u = \frac{1}{x-2}$, calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \left(-\ln(x-2) - \dfrac{2}{x-2} \right)$.

    Du bon et du moins bon ici.

20. **2 pt** En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f'(x)$.

    Assez facile à l'aide de la question précédente. Plusieurs bonnes réponses.

21. **2 pt** Calculer pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f''(x)$.

    Une poignée de bonnes réponses.

22. **2 pt** Calculer pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f^{(3)}(x)$.

    Peu traitée et encore moins réussie.

23. **2 pt** Déterminer le tableau de variation complet de f' sur $]2; +\infty[$.

    Vous êtes moins nombreux à parvenir jusqu'ici sans erreur et à donc donner le bon tableau de variation.

24. **2 pt** La fonction f' est-elle majorée ? minorée ? bornée sur $]2; +\infty[$?

    Il y a trois questions... il faut répondre aux trois questions ! J'ai mis des points de cohérence si jamais on s'était trompé à la question précédente.

25. **2 pt** Justifier qu'il existe un **unique** $\alpha \in]2; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

    Une ou deux bonnes réponses seulement.

26. On pose $\beta = f(\alpha)$.

    (a) **1 pt** Montrer que $\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right) = \frac{4\alpha}{\alpha^2-4} - \frac{1}{4}$.
    Assez facile, peu traitée.

    (b) **2 pt** En déduire que $\beta = \frac{4\alpha^2}{\alpha^2-4} + \frac{1}{2}$.
    Pas dure non plus mais peu traitée.

Partie 4 : Conclusion **5 pt**

27. **3 pt** Donner le tableau de variation complet de f sur $\mathcal{D}$.

    Assez peu traitée. Il ne fallait pas oublier de donner les variations aussi sur $]-\infty; -2[$ par parité.

28. **2 pt** Justifier que le graphe de f admet une tangente au point $x = 14$ et déterminer l'équation de cette tangente.

    Très peu traitée.

Problème III - Bijection 47 pt

Partie 1 : Etude de h 12 pt

On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1. 2 pt Déterminer U le domaine de définition de h.
   Globalement bien mais des fois des rédactions à revoir ou des variables x pas toujours présentées.
2. 2 pt Déterminer la parité de h.
   Les mêmes erreurs que pour la parité de f. Ici la question était plus facile, davantage de bonnes réponses.
3. 2 pt Déterminer U' le domaine de dérivabilité de h.
   Très peu de bonnes réponses. La fonction h n'est pas dérivable sur son domaine de définition. Certains ont pensé qu'il fallait juste prendre la partie positive du domaine de U. D'autres ont vu que la racine carrée posait problème mais non pas justifié comment ils obtenaient U'. Il arrive parfois qu'il ne faille pas juste enlever les bornes.
4. 2 pt Montrer que pour tout $x \in U'$,
   $$h'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$
   Quelques forçages mais bien dans l'ensemble.
5. 2 pt Préciser le comportement asymptotique de h en $+\infty$.
   Des erreurs mais pas mal de bonnes réponses.
6. 2 pt Dresser le tableau de variations complet de h.
   Justifiez bien toutes les données du tableau de h AVANT de l'écrire.

Partie 2 : Etude de H 7 pt

On pose $V =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ et pour tout $x \in V$, $H(x) = h(x)^2$.

7. 1 pt Vérifier que $\forall x \in V$, $H(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
   Facile et souvent réussie.
8. 2 pt Dresser le tableau de variations complet de H sur V.
   Lisez la consigne, on demande le tableau de H sur V uniquement sur V pas ailleurs mais sur V tout entier. Pas très dure mais pas autant de bonnes réponses que ça aurait dû.
9. 2 pt Déterminer $H([1;2])$ et $H(]-\infty;2[)$.
   Cette notion est à revoir pour plusieurs d'entre vous et la rédaction encore plus. Quelques bonnes réponses.
10. 2 pt Déterminer $H^{\leftarrow}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)$.
    Moins de succès aussi. Notion tout aussi importante à connaître.

Partie 3 : Etude de f 12 pt

On considère désormais la fonction $f = \ln(h) : x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$.

11. 2 pt Déterminer I le domaine de définition de f.
    Question basique mais qui présente des difficultés pour plusieurs d'entre vous. A retravailler.
12. 2 pt Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
    Quelques forçages ou erreurs et des bonnes réponses aussi.
13. 2 pt Justifier que f est dérivable sur I et démontrer que pour tout $x \in I$,
    $$f'(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$
    Certains recommencent le calcul de h'. Il valait mieux se servir de la question 4... **Mais en la citant ! ! !** Ce que peu ont fait.
14. 2 pt Déterminer le tableau de variation complet de f sur I.
    Pas dure si on a réussi les questions précédentes.
15. 2 pt Démontrer que f définit une bijection de I dans un intervalle J à préciser. On note $g = f^{-1}$.
    Cadeaux c'est du cours. Peu sont parvenus jusqu'ici.
16. 2 pt Calculer g.
    Quelques bonnes réponses. Ceux qui l'ont traité savaient comment partir.

Partie 4 : Calcul de g par une équation différentielle 16 pt

On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente. On ne pourra donc pas utiliser dans toute la suite le résultat de la question 16.

17. 2 pt **Sans calculer** g, démontrer que g est dérivable sur J.
    Peu traité et la rédaction et les hypothèses du théorème ne sont pas toujours claires. La question est facile si l'on a réussi les précédentes et que l'on connaît son cours.
18. 2 pt Toujours sans calculer g, montrer que g vérifie l'équation différentielle :
    $$\forall y \in J, \quad g'(y) = g(y)\left(g(y)^2 - 1\right).$$
    Une seule bonne réponse.

On pose pour tout $y \in J$, $\varphi(y) = \frac{1}{g(y)^2}$.

19. 2 pt Préciser $g(J)$. En déduire que φ est bien définie et dérivable sur J.
    Une seule bonne réponses
20. 2 pt Exprimer pour tout $y \in J$, $g(y)$ et $g'(y)$ en fonction de $\varphi(y)$ et $\varphi'(y)$.
    Non traitée
21. 2 pt En déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on précisera tel que
    $$\forall y \in J, \quad \varphi'(y) + a\,\varphi(y) = b \qquad (\bigstar)$$
    Non traitée

22. **2 pt** Vérifier que pour tout $A \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_A : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 1 + A\,\mathrm{e}^{2y} \end{array}$ est une solution de $(\bigstar)$.

    Non traitée

23. **2 pt** On admet qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \varphi_A$ sur J. En déduire g en fonction de A.

    Non traitée

24. **2 pt** Déterminer la valeur de A et retrouver alors le résultat de la question 16.

    Non traitée