Corrigé du Devoir Surveillé 1
Logique, fonctions réelles et bijections

Problème I - Logique

On pose $\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $\mathrm{Id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$.
Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les assertions suivantes :

$$\begin{array}{lcl} A(f) & : & \text{« } \forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f\circ g = g \circ f \text{ »} \\ B(f) & : & \text{« } f\circ\tau = \tau\circ f \text{ »} \\ C(f) & : & \text{« } \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = a+n \text{ »} \\ D(f) & : & \text{« } f = \mathrm{Id} \text{ »} \end{array}$$

On fixe $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Précisons $B(f)$. On a

$$\begin{array}{lcl} B(f) & : & f\circ\tau = \tau\circ f \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ f\circ\tau(x) = \tau\circ f(x) \\ & \Leftrightarrow & \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)+1.} \end{array}$$

2. Déterminons la négation de $C(f)$. Puisque $C(f)$: « $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = a+n$ », on obtient

$$\boxed{\overline{C(f)} : \quad \text{« } \forall a \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ f(n) \neq a+n. \text{ »}}$$

3. Soit $I(f) : (B(f) \Rightarrow C(f))$. Enonçons la réciproque, la négation et la contraposée de $I(f)$.

   La réciproque de $I(f)$ est donnée par

$$\boxed{(C(f) \Rightarrow B(f)) \Leftrightarrow [(\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = a+n) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)+1)].}$$

   La négation de $I(f)$ est donnée par

$$\boxed{\left(B(f) \text{ ET } \overline{C(f)}\right) \Leftrightarrow [(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)+1) \text{ ET } (\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ f(n) \neq a+n)].}$$

   Enfin, la contraposée de $I(f)$ est donnée par

$$\boxed{\left(\overline{C(f)} \Rightarrow \overline{B(f)}\right) \Leftrightarrow [(\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ f(n) \neq a+n) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \neq f(x)+1)].}$$

4. Montrons que $I(f) : (B(f) \Rightarrow C(f))$ est vraie. Supposons $B(f)$ vraie. Démontrons que $C(f)$ l'est alors aussi. Par $B(f)$ est vraie, par la question 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x)+1.$$

   Démontrons $C(f)$:

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = a+n$$

En particulier, il nous faut $f(0) = a + 0$. Posons $a = f(0) \in \mathbb{R}$. Démontrons alors que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = f(0) + n.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $f(n) = f(0) + n$ ». Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$. Alors, $f(0) + n = f(0) + 0 = f(0) = f(n)$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$: $f(n) = f(0) + n$. Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. En utilisant $B(f)$ avec $x = n$,

$$f(n+1) = f(n) + 1 = f(0) + n + 1 \qquad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $f(n) = f(0) + n$. Donc avec $a = f(0)$, on a bien démontré $C(f)$.

Conclusion,

$$\boxed{I(f) \text{ est vraie.}}$$

5. Déterminons si la contraposée de $I(f)$ est vraie. On sait qu'une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité. De plus, par la question précédente $I(f)$ est vraie. Conclusion,

$$\boxed{\text{la contraposée de } I(f) \text{ est vraie.}}$$

6. Soit f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0;1[\\ x \qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que la réciproque de $I(f_0)$ est fausse autrement dit montrons que $(C(f_0) \Rightarrow B(f_0))$ est fausse ou encore que $\left(C(f_0) \text{ ET } \overline{B(f_0)}\right)$ est vraie. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [0;1[$, $f_0(x) = x$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_0(n) = n$. Donc en posant $a = 0$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_0(n) = a + n.$$

De plus, $f_0(0) = 0$ donc l'égalité reste vraie si $n = 0$. Donc pour $a = 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_0(n) = a + n.$$

D'où

$$C(f_0) \text{ est vraie.}$$

Montrons maintenant que $B(f_0)$ est fausse autrement dit montrons

$$\overline{B(f_0)} : \qquad (\exists x \in \mathbb{R},\ f_0(x+1) \neq f_0(x) + 1).$$

Pour $x = 1/2$ par exemple (mais cela marche même pour tout $x \in]0;1[$), on a $f_0(x+1) = f_0\left(\frac{1}{2} + 1\right) = f_0\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ et $f_0(x) + 1 = f_0\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 + 1 = 1 \neq \frac{3}{2}$. Donc pour $x = 1/2$,

$$f_0(x+1) \neq f_0(x) + 1.$$

D'où $B(f_0)$ est fausse. Conclusion,

$$\boxed{\text{la réciproque de } I(f_0) \text{ est fausse.}}$$

7. Montrons que $A(f) \Rightarrow B(f)$. En effet, supposons $A(f)$ vraie. Alors pour tout $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \circ g = g \circ f$. En particulier, pour $g = \tau$, on obtient alors, $f \circ \tau = \tau \circ f$. Donc $\mathscr{B}(f)$ est vraie. Conclusion,

$$\boxed{A(f) \Rightarrow B(f).}$$

On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant $A(f)$.

8. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $f \neq \mathrm{Id}$. Trouvons une fonction g constante telle que $g \circ f = f \circ g$ (on dit que g commute avec f). Par hypothèse $f \neq \mathrm{Id}$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq \mathrm{Id}(a) = a$. Posons $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \end{array}$. La fonction est bien constante et on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = f(a) \\ g \circ f(x) = g(f(x)) = a \end{cases}.$$

Or $f(a) \neq a$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$ et puisque cela est vrai partout, cela est vraie en au moins un point et donc $f \circ g \neq g \circ f$. Conclusion,

$$\boxed{\text{pour } g : x \mapsto a, \text{ on a } f \circ g \neq g \circ f.}$$

9. On a démontré à la question précédente que si $f \neq \mathrm{Id}$, alors $\exists g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tel que $f \circ g \neq g \circ f$. Ainsi,

$$\boxed{(f \neq \mathrm{Id}) \Rightarrow \overline{A(f)}.}$$

10. En prenant la contraposée de la question précédente, on obtient

$$A(f) \Rightarrow (f = \mathrm{Id}).$$

Réciproquement, montrons que $(f = \mathrm{Id}) \Rightarrow A(f)$. Supposons $f = \mathrm{Id}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Alors pour $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) \\ g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x). \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ i.e. $f \circ g = g \circ f$. Ceci étant vrai pour tout $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on en déduit que $A(f)$ est vraie. Donc $(f = \mathrm{Id}) \Rightarrow A(f)$. Conclusion,

$$\boxed{A(f) \Leftrightarrow D(f).}$$

Problème II - Fonctions réelles

On considère la fonction

$$f : \quad x \mapsto x \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2}.$$

Partie 1 : Généralité

1. Calculons $f(14)$.

Par définition,

$$\begin{aligned} f(14) &= 14\ln\left(\frac{14+2}{14-2}\right) + \frac{|14|}{4} + \frac{1}{2} \\ &= 14\ln\left(\frac{16}{12}\right) + \frac{14}{4} + \frac{1}{2} \\ &= 14\ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{16}{4} \\ &= 14\ln(4) - 14\ln(3) + 4 \\ &= 28\ln(2) - 14\ln(3) + 4. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f\left(14\right) = 28\ln(2) - 14\ln(3) + 4.}$$

2. Calculons $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x \in \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)\text{existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x+2}{x-2} > 0.$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+2}{x-2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \left]-\infty; -2\right[\cup \left]2; +\infty\right[.}$$

3. Montrons que f est paire.
D'une part, par la question précédente, on remarque que $\mathcal{D}$ est centré en 0.
D'autre part, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned}
f\left(-x\right) &= -x\ln\left(\frac{-x+2}{-x-2}\right) + \frac{|-x|}{4} + \frac{1}{2} \\
&= -x\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} \\
&= x\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$$

On en déduit que la graphe de f est symétrique par rapport à l'axe (Oy).

$$\boxed{\text{Il est donc possible d'étudier la fonction } f \text{ sur } \left]2; +\infty\right[.}$$

Partie 2 : Etude aux bornes

4. Calculons $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 2 \\ x>2}} f(x)$. On observe que

$$\lim_{\substack{x \mapsto 2 \\ x>2}} \frac{x+2}{x-2} = \text{« } \frac{4}{0^+} \text{ »} = +\infty.$$

Par composition,

$$\lim_{\substack{x \mapsto 2 \\ x>2}} \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = +\infty.$$

Donc par produit et somme,

$$\lim_{\substack{x\mapsto 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\mapsto 2\\ x>2}} x\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\mapsto 2\\ x>2}} f(x) = +\infty.}$$

5. Montrons que $\forall x \in]2;+\infty[,\ f(x) \geqslant \frac{x}{4}$. Soit $x \in]2;+\infty[$. Alors, $x+2 > x-2$ donc

$$\frac{x+2}{x-2} > 1 \qquad \text{car } x-2>0.$$

Donc par la stricte croissance de la fonction logarithme,

$$\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > 0.$$

Puisque $x > 2 > 0$, $x\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > 0$. D'où,

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{|x|}{4} = \frac{x}{4} \qquad \text{car } x \geqslant 0.$$

Ceci étant vrai pour $x > 2$ quelconque, on en conclut que

$$\boxed{\forall x \in]2;+\infty[\,, \quad f(x) \geqslant \frac{x}{4}.}$$

6. Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4} = +\infty.$$

Donc par la question précédente et le théorème de minoration, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

7. Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Pour tout $x > 2$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{|x|}{4x} + \frac{1}{2x}\\
&= \ln\left(\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}\right) + \frac{x}{4x} + \frac{1}{2x} \qquad \text{car } x>0\\
&= \ln\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2x}.
\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1$. Donc par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right) = 0.$$

Donc par somme,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{2x}\right)=0+\frac{1}{4}+0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{4}.}$$

8. Soit $h : u\mapsto \ln(1+u)$. Déterminons le domaine de dérivabilité de h. On sait que la fonction logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$. Donc pour $u\in\mathbb{R}$, on a

$$h \text{ dérivable en } u \qquad\Leftrightarrow\qquad 1+u>0 \qquad\Leftrightarrow\qquad u>-1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est dérivable sur }]-1;+\infty[\,.}$$

9. Calculons $h'(0)$. On commence par noter que $0\in\,]-1;+\infty[$ donc h est dérivable en 0. De plus,

$$\forall u\in\,]-1;+\infty[\,,\quad h'(u)=\frac{(1+u)'}{1+u}=\frac{1}{1+u}.$$

En particulier,

$$\boxed{h'(0)=1.}$$

10. Montrons que $\lim\limits_{\substack{u\to0\\u\neq0}}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1.$

Par la question précédente et la définition de la dérivée,

$$\lim_{\substack{u\to0\\u\neq0}}\frac{h(u)-h(0)}{u-0}=h'(0)=1.$$

On a pour tout $u\in\,]-1;0[\,\cup\,]0;+\infty[$,

$$\frac{h(u)-h(0)}{u-0}=\frac{\ln(1+u)-\ln(1)}{u}=\frac{\ln(1+u)}{u}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{u\to0\\u\neq0}}\frac{\ln(1+u)}{u}=1.}$$

11. Montrons que pour tout $x\in\,]2;+\infty[$, $f(x)=x\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$.

Soit $x>2$, on a

$$\begin{aligned}f(x)&=x\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)+\frac{|x|}{4}+\frac{1}{2}\\&=x\ln\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\\&=x\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\,]2;+\infty[\,,\quad f(x)=x\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}.}$$

12. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = \frac{5}{2}$.

Par la question précédente, pour tout $x \in]2; +\infty[$,

$$f(x) - \frac{x}{4} = x \ln \left(1 + \frac{4}{x-2} \right) + \frac{1}{2}.$$

Pour tout $x \in]2; +\infty[$, posons $u = \frac{4}{x-2}$. On a

$$\begin{aligned} u(x-2) = 4 \quad & \Leftrightarrow \quad x - 2 = \frac{4}{u} \quad \text{car } u \neq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{u} + 2 = \frac{4+2u}{u}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$f(x) - \frac{x}{4} = \frac{4+2u}{u} \ln(1+u) + \frac{1}{2} = (4+2u) \frac{\ln(1+u)}{u} + \frac{1}{2}.$$

Or quand $x \to +\infty$, on a $u = \frac{4}{x-2} \to 0$. Donc

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = \lim_{u \to 0} \left[(4+2u) \frac{\ln(1+u)}{u} + \frac{1}{2} \right].$$

Or par la question 10. $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. Donc par produit et somme,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = 4 \times 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = \frac{9}{2}.}$$

13. Par la question précédente, on en déduit directement que

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y = \frac{x}{4} + \frac{9}{2} \text{ en } +\infty.}$$

14. Déterminons le comportement asymptotique de f en $-\infty$.

Par la question 3. la fonction f est paire. Donc par la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2} \text{ en } -\infty.}$$

Partie 3 : Etude de la dérivée

15. Justifions que f est dérivable sur $]2; +\infty[$.

Pour tout $x > 2$, on a $x - 2 \neq 0$. Donc $x \mapsto \frac{x+2}{x-2}$ est dérivable sur $]2; +\infty[$. De plus, par la question 2. pour tout $x > 2$, $\frac{x+2}{x-2} > 0$. La fonction ln étant dérivable sur $]0; +\infty[$, par composition, $x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ est dérivable sur $]2; +\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et donc sur $]2; +\infty[$. Par produit et somme, on en conclut que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur }]2; +\infty[.}$$

16. Calculons f'. On a pour tout $x \in]2;+\infty[$,

$$f(x) = x\ln(x+2) - x\ln(x-2) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}.$$

La fonction f étant dérivable sur $]2;+\infty[$ par la question précédente, on calcule pour tout $x \in]2;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x+2) + \frac{x}{x+2} - \ln(x-2) - \frac{x}{x-2} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{x(x-2) - x(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{x(x-2-x-2)}{x^2-4} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]2;+\infty[, \quad f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{1}{4}.}$$

17. Déterminons le comportement asymptotique de f' en $+\infty$.

Pour tout $x > 2$, $\frac{x+2}{x-2} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = 0.$$

De plus, $\dfrac{4x}{x^2-4} = \dfrac{4}{x - \frac{4}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par somme,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 - 0 + \frac{1}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } f' \text{ présente une asymptote horizontale d'équation } y = \frac{1}{4} \text{ en } +\infty.}$$

18. Montrons que $\forall x \in]2;+\infty[$, $f'(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$.

Pour tout $x \in]2;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{2(x+2) + 2(x-2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{2(x+2+x-2)}{x^2-4} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{1}{4} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]2;+\infty[, \quad f'(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.}$$

19. Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(-\ln(x-2) - \dfrac{2}{x-2}\right)$. Pour tout $x > 2$, posons $u = \frac{1}{x-2}$ i.e. $x-2 = \frac{1}{u}$ ou encore $x = \frac{1}{u} + 2 = \frac{1+2u}{u}$. Alors,

$$-\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} = -\ln\left(\frac{1}{u}\right) - 2u = \ln(u) - 2u = u\left(\frac{\ln(u)}{u} - 2\right).$$

De plus quand $x \to 2$, $x > 2$, on a $u = \frac{1}{x-2} \longrightarrow \frac{1}{0^+} = +\infty$. Par croissance comparée,

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0.$$

Donc par produit,

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(-\ln(x-2) - \frac{2}{x-2}\right) = \lim_{u\to+\infty} u\left(\frac{\ln(u)}{u} - 2\right) = +\infty \times (-2) = -\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(-\ln(x-2) - \frac{2}{x-2}\right) = -\infty.}$$

20. Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f'(x)$. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \ln(x+2) - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{4} = \ln(4) - \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} = \ln(4) - \dfrac{1}{4}$. Donc par la question précédente, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left[\ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}\right] = -\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f'(x) = -\infty.}$$

21. Calculons f''. Par la question 18. pour tout $x \in \,]2;+\infty[$, $f'(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$. Donc la fonction f' est dérivable sur $]2;+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont et de plus,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \,]2;+\infty[\,, \quad f''(x) &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x+2)^2} \\
&= \frac{(x+2)(x-2)^2 - (x+2)^2(x-2) + 2(x+2)^2 + 2(x-2)^2}{(x+2)^2(x-2)^2} \\
&= \frac{(x+2)(x-2)(x-2-(x+2)) + 2\left(x^2+4x+4+x^2-4x+4\right)}{(x+2)^2(x-2)^2} \\
&= \frac{\left(x^2-4\right)(-4) + 4x^2 + 16}{(x+2)^2(x-2)^2} \\
&= \frac{32}{(x+2)^2(x-2)^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \,]2;+\infty[\,, \quad f''(x) = \frac{32}{(x+2)^2(x-2)^2}.}$$

22. Calculons $f^{(3)}$. Par la question précédente, on a

$$\forall x \in \left]2;+\infty\right[, \quad f''(x) = \frac{32}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

La fonction f'' est dérivable sur $]2;+\infty[$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]2;+\infty[$. Donc f est trois fois dérivable sur $]2;+\infty[$ et pour tout $x \in]2;+\infty[$,

$$\forall x \in \left]2;+\infty\right[, \quad f^{(3)}(x) = -2\frac{32 \times (2x)}{\left(x^2-4\right)^3} = -\frac{128x}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]2;+\infty\right[, \quad f^{(3)}(x) = -\frac{128x}{\left(x^2-4\right)^3}.}$$

23. Déterminons le tableau de variation complet de f' sur $]2;+\infty[$.
Par la question 21. $\forall x > 2$, $f''(x) = \frac{32}{(x+2)^2(x-2)^2} > 0$. Donc la fonction f' est strictement croissante sur $]2;+\infty[$. De plus par les questions 17. et 20. on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} f'(x) = -\infty$. Conclusion,

x	2	$+\infty$
f'	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{4}$

24. Par la question précédente, pour tout $x > 2$, $f'(x) < \frac{1}{4}$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f' \text{ est majorée sur }]2;+\infty[.}$$

Cependant $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} f'(x) = -\infty$ implique que

$$\boxed{\text{la fonction } f' \text{ n'est ni minorée ni a fortiori bornée sur }]2;+\infty[.}$$

25. Montrons qu'il existe un unique $\alpha \in]2;+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Par ce qui précède, on a $0 \in \left]-\infty; \frac{1}{4}\right[= \left]\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} f'(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right[$. De plus la fonction f est continue et strictement croissante sur $]2;+\infty[$. Conclusion, par le théorème de la bijection ou le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

$$\boxed{\exists! \alpha \in \left]2;+\infty\right[, \quad f'(\alpha) = 0.}$$

26. On pose $\beta = f(\alpha)$.

(a) Montrons que $\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right)=\frac{4\alpha}{\alpha^2-4}-\frac{1}{4}$.
Par construction de α, on a

$$\begin{aligned} f'(\alpha)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right)-\frac{4\alpha}{\alpha^2-4}+\frac{1}{4}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right)=\frac{4\alpha}{\alpha^2-4}-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right)=\frac{4\alpha}{\alpha^2-4}-\frac{1}{4}.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \beta &= f(\alpha) \\ &= \alpha\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right)+\frac{|\alpha|}{4}+\frac{1}{2} \\ &= \alpha\left(\frac{4\alpha}{\alpha^2-4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2} \qquad \text{par la question précédente et } \alpha>2>0. \\ &= \frac{4\alpha^2}{\alpha^2-4}+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\beta=\frac{4\alpha^2}{\alpha^2-4}+\frac{1}{2}.}$$

Partie 4 : Conclusion

27. Calculons le tableau de variation complet de f sur $\mathcal{D}=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.
Par la question 23. la fonction f' est strictement croissante sur $]2;+\infty[$ et par la question 25. $f'(\alpha)=0$. On a donc

x	2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

De plus, par la question 4. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$, $f(\alpha)=\beta$ et par la question 6. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. D'où,

x	2		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Par parité de la fonction f, on en conclut que

x	$-\infty$		$-\alpha$		-2		2		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$	//////	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

28. Déterminons l'existence et l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 14$. On sait que f est dérivable sur $]2; +\infty[$ donc en 14. Donc

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ possède une tangente au point } x = 14.}$$

De plus l'équation de cette tangente est donnée par

$$y = f'(14)(x - 14) + f(14).$$

Par la question 16.

$$\begin{aligned}
f'(14) &= \ln\left(\frac{14+2}{14-2}\right) - \frac{4 \times 14}{(14)^2 - 4} + \frac{1}{4} \\
&= \ln\left(\frac{16}{12}\right) - \frac{14}{7^2 - 1} + \frac{1}{4} \\
&= \ln(4) - \ln(3) - \frac{14}{48} + \frac{1}{4} \\
&= 2\ln(2) - \ln(3) - \frac{7}{24} + \frac{6}{4} \\
&= 2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Par la question 1. $f(14) = 28\ln(2) - 14\ln(3) + 4$. D'où l'équation devient

$$\begin{aligned}
y &= \left(2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}\right)(x - 14) + 28\ln(2) - 14\ln(3) + 4 \\
&= \left(2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}\right)x - 28\ln(2) + 14\ln(3) - \frac{7}{12} + 28\ln(2) - 14\ln(3) + 4 \\
&= \left(2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}\right)x + \frac{-7+48}{12} \\
&= \left(2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}\right)x + \frac{41}{12}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 14$ est

$$\boxed{y = \left(2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}\right)x + \frac{41}{12}.}$$

Problème III - Bijection

Partie 1 : Etude de h

On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1. Calculons U le domaine de définition de h. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in U \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 \geqslant 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \ \text{ OU } \ x \leqslant -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant 1 \ \text{ OU } \ x \leqslant -1. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{U =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\,.}$$

2. Déterminons la parité de h.
   - On note que U est centré en 0.
   - Soit $x \in U$. On a

$$h(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2 - 1}}{-x} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = h(x).$$

   Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est impaire.}}$$

3. Soit U' le domaine de dérivabilité de h. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in U' \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 > 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \ \text{ OU } \ x < -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x > 1 \ \text{ OU } \ x < -1. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{U' =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\,.}$$

4. Montrons que pour tout $x \in U'$, $h'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. Par la question précédente, la fonction h est

dérivable sur U'. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in U', \quad h'(x) &= \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)' x - \sqrt{x^2-1}}{x^2}\\ &= \frac{\frac{\left(x^2-1\right)'}{2\sqrt{x^2-1}} x - \sqrt{x^2-1}}{x^2}\\ &= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} x - \sqrt{x^2-1}}{x^2}\\ &= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}}{x^2}\\ &= \frac{x^2-\left(x^2-1\right)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\\ &= \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in U', \quad h'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.}$$

5. Déterminons le comportement asymptotique de h en $+\infty$. Pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\\ &= \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} \qquad \text{car } x>0\\ &= \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } h \text{ présente en } +\infty \text{ une asymptote d'équation } y=1.}$$

6. Déterminons le tableau de variation de h. Par la question 4. on a

$$\forall x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[, \quad h'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

Donc pour tout $x>1$, $h'(x)>0$. Donc la fonction h est strictement croissante sur $]1;+\infty[$. De plus la fonction h est définie et même continue sur $[1;+\infty[$. Donc par continuité en 1, on obtient que h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. D'autre part, $h(1) = \frac{\sqrt{1-1}}{1} = 0$ et par la question précédente, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$. Ainsi,

x	1	$+\infty$
h	0 ↗	1

Par imparité de fonction h, on en conclut

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h	-1	$\nearrow$	0		0	$\nearrow$	1

Partie 2 : Etude de H

On pose $V =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et pour tout $x \in V$, $H(x) = h(x)^2$.

7. Montrons que $\forall x \in V$, $H(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

   On note que $V = U$ donc par la question 1., H est bien définie sur V. Soit $x \in V$. On a

$$H(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^2 = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in V, \quad H(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.}$$

8. Déterminons le tableau de variations de H.

   On note que V est centré en 0 et pour tout $x \in V$, $H(-x) = 1 - \frac{1}{(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2} = H(x)$. Donc la fonction H est paire. Etudions H sur $[1; +\infty[$. La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est strictement décroissante puis $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est strictement croissante donc H est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. *On pouvait aussi étudier sa dérivée :* $H'(x) = \frac{2}{x^3} > 0$. De plus, $H(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = 1$. Conclusion, par parité de H, on obtient

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h	1	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	1

9. Déterminons $H([1; 2])$ et $H(]-\infty; 2[)$.

   On a $H(1) = 0$ et $H(2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Donc par la croissance de H et sa continuité on en déduit que

$$\boxed{H([1;2]) = \left[0; \frac{3}{4}\right].}$$

   De plus, par son tableau de variation, on en déduit également que

$$\boxed{H(]-\infty; 2[) = [0; 1[.}$$

10. Calculons $H^{\leftarrow}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)$.
Soit $x \in V$. On a

$$\begin{aligned} H(x) = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \qquad \text{car } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2}\ OU\ x = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

D'où,

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1		1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
h	1	$\frac{1}{2}$	0		0	$\frac{1}{2}$	1

Conclusion,

$$\boxed{H^{\leftarrow}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\sqrt{2};-1\right] \cup \left[1;\sqrt{2}\right].}$$

Partie 3 : Etude de f

On considère désormais la fonction $f = \ln(h) : x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$.

11. Calculons I le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in I \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} > 0 \\ x^2 - 1 \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x^2-1} \neq 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 1 \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \ \text{ OU } \ x < -1 \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x > 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I =]1;+\infty[.}$$

12. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Pour tout $x > 1$, on a

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Donc par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

13. Montrons que f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

ATTENTION, ne pas dire que f est dérivable sur son domaine de définition car ce n'est pas le cas en général de la fonction racine carrée !

On a vu que la fonction h est dérivable sur $U =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ donc notamment sur $I =]1;+\infty[$. De plus, par la question 6. on sait que $h\left(]1;+\infty[\right) =]0;1[$ donc h est à valeurs sur $\mathbb{R}_+^*$ sur I et la fonction logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$. Donc par composée,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } I.}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, \quad f'(x) &= (\ln \circ h)'(x) \\
&= \frac{h'(x)}{h(x)} \\
&= \frac{\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} \qquad \text{par la question 4.} \\
&= \frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.}$$

14. Déterminons le tableau de variations de f sur I.

Par la question précédente, $\forall x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)} > 0$ car $x > 1$. Donc la fonction f est strictement croissante sur I. De plus, on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Enfin,

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2-1 = 0^+,$$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 0^+$. D'où

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = -\infty.$$

Conclusion,

x	1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0

15. Montrons que f définit une bijection.

    Par ce qui précède,

    - La fonction f est continue sur I (car dérivable)
    - la fonction f est strictement croissante sur I

    Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } I \text{ dans } J = f(I) =]-\infty; 0[.}$$

    On note $g = f^{-1}$.

16. Soient $x \in I =]1; +\infty[$ et $y \in J =]-\infty; 0[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad x\,\mathrm{e}^y = \sqrt{x^2-1} \\
&\Leftrightarrow \quad (x\,\mathrm{e}^y)^2 = x^2-1 \qquad \text{car } \begin{cases} x^2-1>0 \\ x\,\mathrm{e}^y > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2\,\mathrm{e}^{2y} = x^2-1 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2\left(1-\mathrm{e}^{2y}\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2y}} \qquad \text{car } 1-\mathrm{e}^{2y} > 0 \text{ car } y < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2y}}} \qquad \text{car } 1-\mathrm{e}^{2y} > 0 \text{ et } x > 0.
\end{aligned}$$

    Conclusion, on en déduit que

$$\boxed{g : \begin{array}{ccc}]-\infty; 0[& \to &]1; +\infty[\\ y & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2y}}} \end{array}.}$$

Partie 4 : Calcul de g par une équation différentielle

On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente. On ne pourra donc pas utiliser dans toute la suite le résultat de la question 16.

17. Montrons que g est dérivable sur J. On observe que

    - la fonction f est dérivable sur I d'après la question 13.
    - la fonction f est strictement croissante sur I d'après la question 14.
    - pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)} \neq 0$.

    Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, on en conclut que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est dérivable sur } J =]-\infty; 0[.}$$

18. Montrons que g vérifie l'équation différentielle : $\forall y \in J, \quad g'(y) = g(y)\left(g(y)^2 - 1\right)$.

    Toujours par le théorème de la dérivée de la réciproque, on sait de plus que, pour tout $y \in J$,

$$g'(y) = \frac{1}{f'\left(g(y)\right)}.$$

Or pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$ et pour tout $y \in J$, $x = g(y) \in I$ donc

$$\forall y \in J,\ g'(y) = \frac{1}{\frac{1}{g(y)(g^2(y)-1)}} = g(y)\left(g(y)^2 - 1\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in J,\ g'(y) = g(y)\left(g(y)^2 - 1\right).}$$

On pose pour tout $y \in J$, $\varphi(y) = \frac{1}{g(y)^2}$.

19. Précisons $g(J)$ et vérifions que φ est dérivable sur J.

    On sait que f est une bijection de I dans J. La fonction $g = f^{-1}$ étant la fonction réciproque de f est une bijection de J dans I. Nécessairement,

    $$\boxed{g(J) = I =]1; +\infty[.}$$

    Par conséquent, pour tout $y \in J$, $g(y) \in]1; +\infty[$ et donc $g(y) > 1 > 0$. Dès lors pour tout $y \in J$, $g(y)^2 \neq 0$. Par conséquent,

    $$\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } J.}$$

    La fonction $y \mapsto g(y)^2$ est dérivable sur J et ne s'annule pas. La fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par composée, on en conclut que

    $$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } J.}$$

20. Exprimons pour tout $y \in J$, $g(y)$ et $g'(y)$ en fonction de $\varphi(y)$ et $\varphi'(y)$. Soit $y \in J$. Puisque $\varphi(y) = \frac{1}{g(y)^2}$, on en déduit que $\varphi(y) \in \mathbb{R}_+^*$. Puis, on observe directement que

    $$g(y)^2 = \frac{1}{\varphi(y)} \Rightarrow g(y) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}}.$$

    D'où

    $$\boxed{\forall y \in J,\ g(y) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}}.}$$

    De plus, en dérivant car g et φ sont dérivables et $\varphi > 0$ implique que $\sqrt{\varphi}$ est aussi dérivable, on a

    $$\forall y \in J,\ g'(y) = \left(\varphi(y)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}\,\varphi'(y)\,\varphi(y)^{-3/2} = -\frac{\varphi'(y)}{2\,\varphi(y)\sqrt{\varphi(y)}}$$

    Conclusion,

    $$\boxed{\forall y \in J,\ g'(y) = -\frac{\varphi'(y)}{2\,\varphi(y)\sqrt{\varphi(y)}}.}$$

21. Déterminons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall y \in J, \quad \varphi'(x) + a\,\varphi(y) = b$ ($\bigstar$).

    On sait que pour tout $y \in J$, $g'(y) = g(y)\left(g(y)^2 - 1\right)$. Donc par la question précédente,

    $$\begin{aligned}
    & \forall y \in J, \quad -\frac{\varphi'(y)}{2\,\varphi(y)\sqrt{\varphi(y)}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}}\right)^2 - 1\right) \\
    \Leftrightarrow \quad & \forall y \in J, \quad -\varphi'(y) = \frac{2\,\varphi(y)\sqrt{\varphi(y)}}{\sqrt{\varphi(y)}}\left(\frac{1}{\varphi(y)} - 1\right) \\
    \Leftrightarrow \quad & \forall y \in J, \quad -\varphi'(y) = 2\,\varphi(y)\frac{1-\varphi(y)}{\varphi(y)} \\
    \Leftrightarrow \quad & \forall y \in J, \quad -\varphi'(y) = 2\,(1 - \varphi(y)) \\
    \Leftrightarrow \quad & \forall y \in J, \quad \varphi'(y) = -2\,(1 - \varphi(y)) \\
    \Leftrightarrow \quad & \forall y \in J, \quad \varphi'(y) - 2\,\varphi(y) = -2.
    \end{aligned}$$

Conclusion, en prenant $a = b = -2$, on obtient

$$\boxed{\forall y \in J, \quad \varphi'(y) - 2\,\varphi(y) = -2. \qquad (\bigstar)}$$

22. Montrons donc que pour tout $A \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_A : \begin{array}{rcl} J & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 1 + A\,\mathrm{e}^{2y} \end{array}$ est une solution de $(\bigstar)$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Posons $\varphi_A : \begin{array}{rcl} J & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 1 + A\,\mathrm{e}^{2y} \end{array}$. La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction φ_A est dérivable sur J et

$$\forall y \in J, \quad \varphi_A'(y) = 2A\,\mathrm{e}^{2y}.$$

Dès lors,

$$\forall y \in J, \quad \varphi_A'(y) - 2\,\varphi_A(y) = 2A\,\mathrm{e}^{2y} - 2\left(1 + A\,\mathrm{e}^{2y}\right) = 2A\,\mathrm{e}^{2y} - 2 - 2A\,\mathrm{e}^{2y} = -2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi_A : \begin{array}{rcl} J & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 1 + A\,\mathrm{e}^{2y} \end{array} \text{ est une solution de } (\bigstar).}$$

23. On admet qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \varphi_A$ sur J. Déterminons g en fonction de A. On sait que $\forall y \in J$, $\varphi(y) = 1 + A\,\mathrm{e}^{2y}$ et que $g(y) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}}$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall y \in J, \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + A\,\mathrm{e}^{2y}}}.}$$

24. Déterminons A et concluons. On a

$$f(2) = \ln\left(\frac{\sqrt{4-1}}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Par conséquent, on obtient que

$$g\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1 + A\,\mathrm{e}^{2\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}}} = 2 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 + A\,\mathrm{e}^{\ln\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}}} = 2 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 + A\,\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}}} = 2 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 + A\left(\frac{3}{4}\right)}} = 2 \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + \frac{3}{4}A} = \frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{3}{4}A = \frac{1}{4} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}A = -\frac{3}{4} \\
& \Leftrightarrow \quad A = -1.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{A = 1}$ et

$$\boxed{g : \begin{array}{rcl}]-\infty; 0[& \to &]1; +\infty[\\ y & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2y}}}. \end{array}}$$

On retrouve bien le résultat de la question 16.

Enthousiasme, admiration et bonheur !