Epreuve de mathématiques 2
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Trigonométrie

Partie 1 : Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$

1. *Méthode 1.*
   (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Développer $\cos(a-b)$.
   (b) En prenant $a = \frac{\pi}{3}$ et une valeur de b bien choisie, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. *Méthode 2.*
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).$$
   (b) Vérifier que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine du polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X + \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(X) = 0$.
   (d) En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   (e) Retrouver alors que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
3. *Méthode 3.*
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $\sin(4x) + \sin(2x)$.
   (b) En déduire à nouveau la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. Calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{2024\pi}{12}\right)$.

Partie 2 : En passant par les complexes

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6} + i\sqrt{2}\right)$ et $Z = z_1 z_2$.

5. Calculer la forme algébrique de Z.
6. Déterminer une forme trigonométrique pour chacun des complexes z_1, z_2 et Z.
7. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
8. Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   $$(1-\sqrt{3})\cos x - (1+\sqrt{3})\sin x = \sqrt{6}$$
9. Préciser les solutions qui sont dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ et les représenter sur le cercle trigonométrique.

Problème 2 - Complexes

On pose :

$$f: \quad z \mapsto \frac{z-i}{z+1}.$$

1. Déterminer $\mathcal{D}$ l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels $f(z)$ existe.
2. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{i-1}{2}\right)$ et $f(-1+i)$ puis préciser leurs formes polaires.
3. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathcal{D}$ tel que $f(z)^2 = 1$.
4. Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$ et donner la représentation graphique de cet ensemble.
5. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Montrer que
$$\overline{f(z)} = i f(z).$$
6. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tel que $\overline{f(z)} = i f(z)$. Montrer que
$$z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}.$$
7. En déduire $f(\mathbb{U} \setminus \{-1\})$ et donner la représentation graphique de cet ensemble.
8. Calculer $A = \left\{\theta \in \mathbb{R} \;\middle|\; \mathrm{e}^{i\theta} \neq -1\right\}$.
9. Soit $\theta \in \left]-\pi; \pi\right[$.
   (a) Montrer que
   $$f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) = i\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right).$$
   (b) En déduire, suivant la valeur de θ, un argument de $f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)$.
   (c) Justifier la cohérence avec la question 7.
10. Montrer que f définit une bijection de $\mathcal{D}$ dans un ensemble $\tilde{\mathcal{D}}$ que l'on précisera et déterminer f^{-1}.

Problème 3 - Calcul algébrique

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ on pose
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha} 2^{a_k},$$
avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$. Préciser S_n pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.
2. On suppose que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. Calculer S_n.

On suppose dans toute la suite que
$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = k.$$
On propose ni une ni deux ni trois mais quatre méthodes pour calculer S_n !

3. Calculer S_1 et S_2.
4. *(Par un changement d'indice)*
   (a) Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, 2^{k+1}$.
   (b) En déduire la valeur de S_n.
5. *(Par une dérivée)* Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}.$$
   En calculant de deux façons la dérivée de f, retrouver la valeur de S_n.
6. *(Par une autre méthode dont je ne donnerai pas le nom...)*
   (a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$(k+1)\, 2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}.$$
   (b) Retrouver alors la valeur de S_n.
7. *(Par une somme double)*
   (a) Sans utiliser les questions précédentes, montrer que
$$\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n} 2^k = S_n.$$
   (b) Retrouver alors la valeur de S_n.
   (c) Calculer la somme double (triangulaire stricte) :
$$\sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k.$$
8. *(Une conséquence)* A l'aide d'une inversion d'indice et de la valeur de S_n (déterminée dans l'une des questions précédentes), calculer
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}.$$

Problème 4 - Trigonométrie

Partie 1 : Manipulation d'une expression trigonométrique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \cos^2(x)\left(\cos(2x) - 1\right) + \sin^2(x).$$

1. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
2. *Signe de $f(x)$, méthode 1.*
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Préciser $\cos(2x)$ uniquement en fonction de $\cos(x)$.
   (b) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 1.$$
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.
3. *Signe de $f(x)$, méthode 2.*
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -\cos(2x)\sin^2(x).$$
   (b) Retrouver alors le résultat de la question 2.c
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser l'expression de $f(x)$: donner une expression de $f(x)$ uniquement en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$.

Partie 2 : Inégalité de Winkler

On pose :

$$g : \quad x \mapsto \sin^2(x) + x\tan(x) - 2x^2.$$

5. Préciser $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition de g et vérifier que $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\subseteq \mathcal{D}_g$.
6. Calculer la dérivée de g sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
7. Montrer que
$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g''(x) = 2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 + 2\left(1 + \tan^2(x)\right)x\tan(x).$$
8. En déduire que
$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g''(x) = \frac{2f(x)}{\cos^2(x)} + 2\left(1 + \tan^2(x)\right)x\tan(x).$$
9. A l'aide de la question 3.a montrer que
$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{4}\sin(4x)\tan(x).$$
10. En déduire que
$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g''(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2(x)\right)\tan(x)\left(4x - \sin(4x)\right).$$
11. On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\sin(t) \leqslant t$. Montrer que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) > 0$.
12. Conclure en démontrant l'inégalité de Winkler :
$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} > 2.$$