Epreuve de mathématiques 3
2024-2025

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Exercice 1 - Complexes

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) \ : \qquad z^{2n} - (1+7i)\, z^n + 8 + 8i = 0.$$

On donne $82^2 = 6724$.

1. Calculer les racines carrées de $-80 - 18i$.
2. Résoudre l'équation $(F) : z^2 - (1+7i)\, z + 8 + 8i = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
3. En déduire les solutions de (E).
4. Préciser le cas $n = 3$. *Parmi les solutions, on en donnera trois sous forme algébrique.*

Problème 2 - Complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose

$$f(z) = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i}.$$

Partie 1 : Autour de f

1. Calculer $f(-i)$ et donner sa forme polaire.
2. Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ l'équation $f(z) = i$.
3. Simplifier pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $f \circ f(z)$.
4. En déduire que f définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans un ensemble à déterminer et préciser sa réciproque.
5. Soit $s : z \mapsto (z - i)\, f(z)$. A quelle similitude correspond s ?
6. Déterminer les points fixes de z i.e. résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ l'équation $f(z) = z$.
7. Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$.

Partie 2 : Autour de g

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose $g(z) = f(z) + 1$.

8. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $g(z) = (1+i)\, \frac{z+1}{z-i}$.
9. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que les points $A(-1)$, $M(z)$ et $M'(f(z))$ soient alignés.
10. Calculer $(1+i)^7$.
11. En déduire l'ensemble des racines 7-ième de $8 - 8i$. *On les exprimera sous forme polaire.*
12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^{7z} = 8 - 8i$.
13. Soit $k \in [\![1;6]\!]$. Montrer que $\frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) \neq i$.
14. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $g(z)^7 = 8 - 8i$ est donné par

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) \ \middle|\ k \in [\![1;6]\!] \right\}$$

Problème 3 - Intégrales

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$I(n,p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Autour des $I(n,p)$

1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Justifier que $I(n,p)$ existe.
2. Calculer $I(0,0)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I(n,0)$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $I(0,p)$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(1,p)$.
6. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.
   (a) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I(n,p) = I(p,n)$.
   (b) Retrouver alors le résultat de la question 5.
7. Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$I(n,p) = \frac{p}{n+1} I(n+1, p-1).$$
8. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déduire des questions 7. et 5. la valeur de $I(2,p)$.
9. Retrouver le résultat de la question précédente grâce à la question 6.a
10. A l'aide d'une récurrence sur n, montrer que
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \ I(n,p) = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}.$$
11. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.
    (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de binôme de Newton, écrire sous forme de somme $t^n (1-t)^p$.
    (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$.
12. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $J(n,p) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t+1)^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t$.
    (a) Déterminer deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'application $s : t \mapsto at + b$ vérifie
$$s([-1;1]) = [0;1].$$
    (b) En déduire que $J(n,p) = 2^{n+p+1} I(n,p)$.

Partie 2 : W comme Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad K(n,p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

13. Calculer W_0.
14. Calculer $V = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
15. Calculer W_1.
16. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
17. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.
18. En déduire que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

19. A l'aide du changement de variable $v = \pi - u$, exprimer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u$ en fonction de W_n.
20. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u$ en fonction de W_n.
21. Linéariser $\cos(\theta)\sin(\theta)$ et en déduire une expression de $K(n,n)$ en fonction de W_n.
22. Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide du changement de variable $t = \cos^2(\theta)$, exprimer $I(n,p)$ en fonction de $K(n,p)$.
23. Conclure des questions précédentes que $\left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Problème 4 - Fonctions usuelles

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right) \end{array}.$$

Partie 1 : Etude de f

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de f.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de dérivabilité de f.
5. Montrer que
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
6. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
7. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$.
   (b) En déduire $f^{\leftarrow}\left(\left\{\frac{\pi}{3}\right\}\right)$.
   (c) Préciser $f^{\leftarrow}\left(\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Partie 2 : Construction d'une réciproque

8. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Justifier que g définie une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un ensemble $J = [\alpha; \beta[$ que l'on déterminera. On note φ la réciproque de g.
9. (a) Vérifier que $\forall x > 0,\ f'(x) = \cos(f(x))$.

   (b) Justifier que φ est bien dérivable sur $]\alpha; \beta[$ puis montrer que
$$\forall x \in \,]\alpha; \beta[\,, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$
10. Justifier que la fonction $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$ est bien définie sur J.
11. Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in J$,
$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$$

Partie 3 : Une équation

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(E) $$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) + \arccos\left(\frac{8}{5\operatorname{ch}(x)}\right).$$

On considère également l'équation suivante d'inconnue $y \in \mathbb{R}$,

(F) $$\arccos(y) - \arcsin(y) = \arccos\left(\frac{8y}{5}\right).$$

12. Déterminer $\mathcal{D}_F$ l'ensemble de définition de l'équation (F).
13. Soit $y \in \mathcal{D}_F$. Montrer que *si* y est une solution de (F) *alors*,
$$2y\left(\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{5}\right) = 0.$$
14. On admet que (F) admet exactement trois solutions. Les déterminer proprement.
15. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).