Commentaires du DS3
Equations complexes, fonctions usuelles, intégrales

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{80}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	E1	P2.1	P2.2	P2	P3.1	P3.2	P3	P4.1	P4.2	P4.3	P4	Total	Note finale
Moyenne	1,8	2,6	4,5	2,9	7,4	5,9	3,1	8,9	7,2	2,6	1,3	11,1	28,4	8,39
Sur		10	15	15	30	29	21	50	19	11	10	40	130	20

TOTAL : 130 pt

Exercice I - Complexes 10 pt

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) : \qquad z^{2n} - (1+7i)\, z^n + 8 + 8i = 0.$$

On donne $82^2 = 6724$.

1. **2 pt** Calculer les racines carrées de $-80 - 18i$.

   On commence par un grand classique. Globalement la méthode est sue mais beaucoup d'erreurs. Certains obtiennent des expressions affreuses à cette première question sans se dire que c'est tout de même étrange. L'indication $82^2 = 6724$ était pourtant une indication flagrante.

2. **3 pt** Résoudre l'équation $(F) : z^2 - (1+7i)\, z + 8 + 8i = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   Les erreurs sur la première question impactaient forcément la suite. La méthode n'est pas maitrisée pour tout le monde. Certains donnent les racines de Δ en conclusion, cela révèle un grave manque de travail. Quelques-uns ont pris b et non $-b$ dans la formule $\frac{-b \pm \delta}{2a}$. Plusieurs bonnes réponses.

3. **3 pt** En déduire les solutions de (E).

   Bien moins souvent traitée. Des confusions sur les racines n-ièmes : le k s'écrit avant la formule plutôt qu'après. Cet entier appartient à $[\![0; n-1]\!]$ et non à $\mathbb{Z}$ (trop vague). Ensuite, il fallait mettre les solutions précédentes sous forme polaire pour simplement réciter le cours.

4. **2 pt** Préciser le cas $n = 3$. *Parmi les solutions, on en donnera trois sous forme algébrique.*

   Une ou deux bonne réponse.

Problème II - Complexes 30 pt

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose

$$f(z) = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i}.$$

Partie 1 : Autour de f 15 pt

1. **2 pt** Calculer $f(-i)$ et donner sa forme polaire.

   Question facile... et pourtant pas beaucoup de bonnes réponses et au contraire bien trop d'erreurs de calcul. A reprendre.

2. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ l'équation $f(z) = i$.

   Plusieurs bonnes réponses. Ne pas se laisser déstabiliser par le fait que la réponse soit $\mathscr{S} = \emptyset$.

3. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Simplifier pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $f \circ f(z)$.

   Un peu calculatoire mais pas si dure et sans aucun piège. Très peu de bonnes réponses.

4. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que f définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans un ensemble à déterminer et préciser sa réciproque.

   Une bonne réponse.

5. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $s : z \mapsto (z - i)\, f(z)$. A quelle similitude correspond s ?

   Quelques bonnes réponses mais il y aurait dû en avoir plus.

6. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Déterminer les points fixes de z i.e. résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ l'équation $f(z) = z$.

   Encore une petite équation du second degré. Question un tout petit peu plus longue mais bien dotée en points. Naturellement, il fallait bien voir que Δ se met sous forme polaire car cela était alors bien plus rapide. Peu de bonnes réponses.

7. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$.

   Un classique vu plusieurs fois en classe mais très très peu traitée.

Partie 2 : Autour de g $\boxed{\textbf{15 pt}}$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose $g(z) = f(z) + 1$.

8. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $g(z) = (1 + i)\,\frac{z+1}{z-i}$.

   Facile, bien résolue.

9. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que les points $A(-1)$, $M(z)$ et $M'(f(z))$ soient alignés.

   Quelques départs très corrects mais des abandons très souvent face aux calculs.

10. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $(1 + i)^7$.

    Ok, plusieurs ont le réflexes « forme polaire » ce qui est une très bonne chose mais si l'on peut revenir à la forme algébrique, la spécifier.

11. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire l'ensemble des racines 7-ième de $8 - 8i$. *On les exprimera sous forme polaire.*

    Pas beaucoup de réponses et encore moins de bonnes.

12. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^{7z} = 8 - 8i$.

    Non réussie.

13. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $k \in [\![1;6]\!]$. Montrer que $\frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) \neq i$.

    Non traitée.

14. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $g(z)^7 = 8 - 8i$ est donné par

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) \;\middle|\; k \in [\![1;6]\!] \right\}$$

    Non traitée.

Problème III - Intégrales $\boxed{50 \text{ pt}}$

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose
$$I(n,p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Autour des $I(n,p)$ $\boxed{29 \text{ pt}}$

1. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Justifier que $I(n,p)$ existe.

   Je n'ai pas eu que des bonnes réponses. C'est du cours très basique, impossible de se tromper ici. Certains s'embrouillent avec une histoire d'existence de primitive et/ou de théorème fondamental de l'analyse, c'est complètement hors sujet ici puisque I n'est pas une fonction ! ! ! mais bien un nombre.

2. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Calculer $I(0,0)$.

   Bien.

3. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I(n,0)$.

   Facile mais certains ont conservé de vraies lacunes de lycée sur les intégrales, il faut me solliciter et s'entrainer pour revenir à niveau.

4. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $I(0,p)$.

   Question presque identique avec un gros piège d'un signe moins qui doit apparaitre dans la primitivation. CE piège en a laissé la moitié sur le carreau.

5. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(1,p)$.

   La rédaction de l'intégration par parties n'est pas toujours bien faite mais de belles réponses.

6. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

   (a) $\boxed{3 \text{ pt}}$ A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I(n,p) = I(p,n)$.
   Le changement de variable était assez simple mais il fallait le trouver. Beaucoup ne l'ont pas traitée ou réussie. A reprendre dans ce cas.

   (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Retrouver alors le résultat de la question 5.
   Réussie lorsque tentée.

7. $\boxed{3 \text{ pt}}$ Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$I(n,p) = \frac{p}{n+1} I(n+1, p-1).$$

   Peu réussie. Un grand classique. Ne pas hésiter à la reprendre aussi.

8. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $p \in \mathbb{N}$. Déduire des questions 7. et 5. la valeur de $I(2,p)$.

   Peu traitée.

9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Retrouver le résultat de la question précédente grâce à la question 6.a

   Peu traitée.

10. $\boxed{3 \text{ pt}}$ A l'aide d'une récurrence sur n, montrer que
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ I(n,p) = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}.$$

    Question bien plus dure car la récurrence doit être faite avec une proposition $\mathscr{P}(n)$: « $\forall p \in \mathbb{N}, \ \ldots$ ». Aucune bonne réponse.

11. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

    (a) $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Soit $t \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de binôme de Newton, écrire sous forme de somme $t^n (1-t)^p$.

    Une seule bonne réponse et pourtant question de cours !

    (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$.

    Non traitée.

12. Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $J(n, p) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t+1)^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t$.

    (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer deux réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'application $s : t \mapsto at + b$ vérifie

    $$s([-1; 1]) = [0; 1].$$

    Une seule bonne réponse.

    (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que $J(n, p) = 2^{n+p+1} I(n, p)$.

    Non traitée.

Partie 2 : W comme Wallis $\boxed{\textbf{21 pt}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) \, \mathrm{d}u \quad \text{et} \quad K(n, p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta) \sin^{2p+1}(\theta) \, \mathrm{d}\theta \,.$$

13. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer W_0.

    Bien !

14. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $V = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \, \mathrm{d}t$.

    Plusieurs bonnes réponses également.

15. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer W_1.

16. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

    Non réussie. On fera beaucoup de questions de ce type au S2 mais n'hésitez pas à le reprendre dès maintenant. Il ne faut pas oublier de parler des bornes dans le bon sens.

17. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive.

    Idem que la question précédente.

18. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ En déduire que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

    Un petit point pour la convergence monotone. Attention la limite n'est pas forcément 0.

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

19. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ A l'aide du changement de variable $v = \pi - u$, exprimer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n+1}(u) \, \mathrm{d}u$ en fonction de W_n.

    Quelques bonnes réponses.

20. $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\, du$ en fonction de W_n.
 Peu traitée, c'était juste de la relation de Chasles. Mais quelques bonnes réponses.

21. $\boxed{2\text{ pt}}$ Linéariser $\cos(\theta)\sin(\theta)$ et en déduire une expression de $K(n,n)$ en fonction de W_n.
 Le dénominateur $\frac{1}{2}$ n'est pas toujours mis à la puissance $2n+1$. Deux trois réponses avec des éléments corrects.

22. $\boxed{2\text{ pt}}$ Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide du changement de variable $t = \cos^2(\theta)$, exprimer $I(n,p)$ en fonction de $K(n,p)$.
 Peu abordée, non réussie.

23. $\boxed{2\text{ pt}}$ Conclure des questions précédentes que $\left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
 Non traitée.

Problème IV - Fonctions usuelles $\boxed{40\text{ pt}}$

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) \end{array}.$$

Partie 1 : Etude de f $\boxed{19\text{ pt}}$

1. $\boxed{2\text{ pt}}$ Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
 Un bon début mais après beaucoup de mal à justifier proprement les inégalités. Quelques personnes ne connaissent pas le domaine de définition d'arccos ou que $\operatorname{ch}(x) \geqslant 1$.

2. $\boxed{1\text{ pt}}$ Etudier la parité de f.
 Ne pas oublié de dire que $\mathbb{R}$ est centré en 0. Sinon bien.

3. $\boxed{3\text{ pt}}$ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
 Pas mal du tout. Quelques-uns se trompent sur la valeur de arccos(0).

4. $\boxed{2\text{ pt}}$ Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de dérivabilité de f.
 Plusieurs belles réponses. Quelques parachutages.

5. $\boxed{3\text{ pt}}$ Montrer que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

 Quelques très belles réponses. Attention à bien justifier les simplification de $\sqrt{ch^2(x)}$ ou de $\sqrt{\operatorname{sh}^2(x)}$.

6. $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
 Ne pas oublier de citer la question qui donne les valeurs en $+\pm\infty$. La valeur en 0 n'est pas une limite ici, il suffit juste de calculer $f(0)$ (sans se tromper). Pas dure et bien réussie.

7. (a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch}(x) = 2$.
 Pas mal de bonnes réponses. Un classique à bien connaitre.
 (b) $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire $f^{\leftarrow}\left(\left\{\frac{\pi}{3}\right\}\right)$.
 Peu traitée.
 (c) $\boxed{2\text{ pt}}$ Préciser $f^{\leftarrow}\left(\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$.
 Peu traitée, jamais réussie.

Partie 2 : Construction d'une réciproque 10 pt

8. 2 pt Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Justifier que g définie une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un ensemble $J = [\alpha; \beta[$ que l'on déterminera. On note φ la réciproque de g.

   De belles réponses. Ne pas oublier de citer le théorème. Ne pas parler de dérivabilité de g mais de continuité. La forme de J (fermé à gauche et ouverte à droite) étant donner ne pas en donner une autre !

9. (a) 1 pt Vérifier que $\forall x > 0,\ f'(x) = \cos(f(x))$.
   Facile. Souvent abordée et réussie.

   (b) 3 pt Justifier que φ est bien dérivable sur $]\alpha; \beta[$ puis montrer que

$$\forall x \in]\alpha; \beta[, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

   Quelques belles réponses mais beaucoup moins nombreuses. Pourtant sans grande difficulté lorsque l'on applique le théorème. Attention, cette fois l'intervalle est ouvert à gauche.

10. 2 pt Justifier que la fonction $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$ est bien définie sur J.
    Mal réussie et pourtant facile. On ne voulait pas le domaine complet de définition de h, juste vérifier que cela fonctionnait sur J.

11. 2 pt Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in J$,

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$$

    Quelques bonnes réponses mais attention au passage $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ à $J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Partie 3 : Une équation 11 pt

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(E)
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) + \arccos\left(\frac{8}{5\operatorname{ch}(x)}\right).$$

On considère également l'équation suivante d'inconnue $y \in \mathbb{R}$,

(F)
$$\arccos(y) - \arcsin(y) = \arccos\left(\frac{8y}{5}\right).$$

12. 2 pt Déterminer $\mathcal{D}_F$ l'ensemble de définition de l'équation (F).
    Facile (quand on connait le domaine de définition de arccos naturellement) et bien réussie.

13. 3 pt Soit $y \in \mathcal{D}_F$. Montrer que *si* y est une solution de (F) *alors*,

$$2y\left(\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{5}\right) = 0.$$

    Attention, on ne voulait qu'une implication. Peu traitée mais deux ou trois bonnes réponses.

14. 3 pt On admet que (F) admet exactement trois solutions. Les déterminer proprement.
    Peu de réponses, deux ou trois belles réponses. Attention à ne pas oublier la synthèse.

15. 2 pt Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
    Une bonne réponse.