# Corrigé du Devoir Surveillé 3
# Equations complexes, fonctions usuelles, calcul d'intégrales

## Exercice I - Complexes

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

$$(E)\ :\qquad z^{2n} - (1+7i)\, z^n + 8 + 8i = 0.$$

On donne $82^2 = 6724$.

1. Soit $z = -80 - 18i$. Déterminons les racines carrées de $z$. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = x + iy \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z \qquad & \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (x+iy)^2 = -80 - 18i \\ |\omega^2| = |\omega|^2 = |z| = |-80-18i| \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -80 - 18i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{80^2 + 18^2} = \sqrt{6400 + 324} = \sqrt{6724} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = -80 \\ x^2 + y^2 = 82 \\ 2xy = 18 \end{cases} \qquad \text{car on a } 82^2 = 6724 \\
& \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 = \frac{-80+82}{2} = 1 \\ y^2 = \frac{82+80}{2} = 81 \\ 2xy = 18 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -9 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 9 \end{cases} \qquad \text{car } xy < 0 \\
& \Leftrightarrow \qquad \omega = 1 - 9i \ \text{ OU } \ \omega = -1 + 9i.
\end{aligned}$$

   Conclusion, l'ensemble des racines carrées de $-80 - 18i$ est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1 - 9i,\ -1 + 9i\}.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Résolvons $(F)$ : $z^2 - (1+7i)\, z + 8 + 8i = 0$. Soit $\Delta$ le discriminant associé. On a

$$\Delta = (1+7i)^2 - 4\,(8+8i) = 1 + 14i - 49 - 32 - 32i = -80 - 18i.$$

   Par la question précédente, on en déduit que $\delta = 1 - 9i$ est UNE racine carrée de $\Delta$. Par conséquent les racines de $(F)$ sont données par

$$z_1 = \frac{1 + 7i + 1 - 9i}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 + 7i - 1 + 9i}{2} = 8i$$

   Conclusion, l'ensemble des solutions de $(F)$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1 - i,\ 8i\}.}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Résolvons $(E)$. Posons $Z = z^n$. On a alors,

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow z^{2n} - (1+7i)\, z^n + 8 + 8i = 0 \\ &\Leftrightarrow Z^2 - (1+7i)\, Z + 8 + 8i = 0 \\ &\Leftrightarrow Z \text{ solution de } (F)\,. \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow Z = 1 - i \ \text{ OU } \ Z = 8i \\ &\Leftrightarrow z^n = 1 - i \ \text{ OU } \ z^n = 8i. \end{aligned}$$

Or

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\,.$$

De plus, $8i = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow z^n = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \ \text{ OU } \ z^n = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z = 2^{\frac{1}{2n}}\,\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \ \text{ OU } \ z = 8^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\,. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de $(E)$ est donné

$$\boxed{\mathscr{S}_n = \left\{ 2^{\frac{1}{2n}}\,\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ 8^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \ \middle|\ k \in [\![0; n-1]\!] \right\}.}$$

4. Précisons les solutions pour $n = 3$. Si $n = 3$, on obtient pour $k \in [\![0; 2]\!]$,

$$2^{\frac{1}{2n}}\,\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}\,.$$

Donc, on a

$$\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}, \quad \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{15\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}\,.$$

Et,

$$8^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = 2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \\ 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}} &= -\sqrt{3} + i \\ 2\,\mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{6}} &= 2\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_3 = \left\{ \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}},\ \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}},\ \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}},\ \sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} + i\ \ -2i \right\}.}$$

# Problème II - Complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose

$$f(z) = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i}.$$

## Partie 1 : Autour de $f$

1. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f(-i) = \frac{i(-i) + 1 + 2i}{-i - i} = \frac{1 + 1 + 2i}{-2i} = \frac{1 + i}{-i} = \frac{i - 1}{1} = -1 + i.$$

Puis,

$$f(-i) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(-i) = -1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\,.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) = i \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{iz + 1 + 2i}{z - i} = i \\ & \Leftrightarrow \quad iz + 1 + 2i = iz + 1 \qquad \text{car } z \neq i \\ & \Leftrightarrow \quad 2i = 0 \text{ impossible.} \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset.}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors par la question précédente, on sait que $f(z) \neq i$. Donc $f \circ f(z)$ existe de plus,

$$\begin{aligned} f \circ f(z) &= \frac{i f(z) + 1 + 2i}{f(z) - i} \\ &= \frac{i\frac{iz+1+2i}{z-i} + 1 + 2i}{\frac{iz+1+2i}{z-i} - i} \\ &= \frac{\frac{-z+i-2}{z-i} + \frac{z+2iz-i+2}{z-i}}{\frac{iz+1+2i-iz-1}{z-i}} \\ &= \frac{-z + i - 2 + z + 2iz - i + 2}{iz + 1 + 2i - iz - 1} \qquad \text{car } z \neq i \\ &= \frac{2iz}{2i} \\ &= z. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \qquad f \circ f(z) = z.}$$

4. Posons $g = f$. La fonction $g$ est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a par la question précédente,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \qquad f \circ g(z) = g \circ f(z) = f \circ f(z) = z = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}\setminus\{i\}}(z).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définit une bijection de } \mathbb{C} \setminus \{i\} \text{ dans } \mathbb{C} \setminus \{i\} \text{ et sa réciproque est donnée par } f^{-1} = f.}$$

5. Soit $s : z \mapsto (z - i)\, f(z)$. Déterminons la similitude $s$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$s(z) = (z - i)\, f(z) = (z - i)\, \frac{iz + 1 + 2i}{z - i} = iz + 1 + 2i.$$

Déterminons le point fixe de $s$. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} s(\omega) = \omega \quad & \Leftrightarrow \quad i\,\omega + 1 + 2i = \omega \\ & \Leftrightarrow \quad (1 - i)\,\omega = 1 + 2i \\ & \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1 + 2i}{1 - i} = \frac{(1 + 2i)(1 + i)}{2} = \frac{1 + i + 2i - 2}{2} = \frac{-1 + 3i}{2}. \end{aligned}$$

Fixons $\omega = \frac{-1+3i}{2}$. On a remarque alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $s(z) = iz+1+2i$ et $\omega = s(\omega) = i\,\omega+1+2i$. Par soustraction,

$$s(z) - \omega = iz - i\,\omega \qquad \Leftrightarrow \qquad s(z) = i\,(z-\omega) + \omega = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,(z-\omega)+\omega\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{s \text{ est une rotation d'angle } \frac{\pi}{2} \text{ et de centre } \omega = \frac{-1+3i}{2}.}$$

6. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) = z \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{iz+1+2i}{z-i} = z \\ &\Leftrightarrow \qquad iz+1+2i = z^2 - iz \qquad\qquad \text{car } z \neq i \\ &\Leftrightarrow \qquad z^2 - 2iz - 1 - 2i = 0. \end{aligned}$$

*Méthode 1.* On observe que $z=-1$ est une solution : si $z=-1$,

$$z^2 - 2iz - 1 - 2i = 1+2i-1-2i = 0.$$

Soit $z_2$ la seconde racine, puisque le coefficient en $z^2$ vaut 1, on a

$$-1+z_2 = s = -(-2i) = 2i \qquad \Leftrightarrow \qquad z_2 = 1+2i.$$

On observe que $-1 \neq i$ et $1+2i \neq i$. Conclusion, l'ensemble des points fixes est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1; 1+2i\}\,.}$$

*Méthode 2.* Soit $\Delta$ le discriminant associé. On a

$$\Delta = -4 + 4\,(1+2i) = 8i = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,.$$

Par conséquent pour $\delta \in \mathbb{C}$, on a

$$\delta^2 = \Delta \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\,(1+i) \qquad \text{OU} \qquad \delta = -2\,(1+i)\,.$$

Dès lors,

$$f(z) = z \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{2i-2-2i}{2} = -1 \qquad \text{OU} \qquad z = \frac{2i+2+2i}{2} = 1+2i.$$

Conclusion, l'ensemble des points fixes est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1; 1+2i\}\,.}$$

7. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \qquad &\Leftrightarrow \qquad f(z) \in \mathbb{U} \\ &\Leftrightarrow \qquad |f(z)|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \qquad f(z)\overline{f(z)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \qquad \frac{iz+1+2i}{z-i}\,\frac{-i\overline{z}+1-2i}{\overline{z}+i} = 1 \\ &\Leftrightarrow \qquad |z|^2 + iz + 2z - i\overline{z} + 1 - 2i + 2\overline{z} + 2i + 4 = (z-i)\,(\overline{z}+i) \qquad\qquad \text{car } z \neq i \\ &\Leftrightarrow \qquad |z|^2 + (2+i)\,z + (2-i)\,\overline{z} + 5 = |z|^2 + iz - i\overline{z} + 1 \\ &\Leftrightarrow \qquad 2z + 2\overline{z} + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad 4\mathrm{Re}\,(z) = -4 \\ &\Leftrightarrow \qquad \mathrm{Re}\,(z) = -1. \end{aligned}$$

On note que si $\mathrm{Re}\,(z) = -1 \neq 0$, alors $z \neq i$. Conclusion, l'ensemble solution est la droite d'équation $x=-1$ :

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) = \{-1+iy \mid y \in \mathbb{R}\}\,.}$$

## Partie 2 : Autour de $g$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose $g(z) = f(z) + 1$.

8. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a

$$g(z) = f(z) + 1 = \frac{iz+1+2i}{z-i} + 1 = \frac{iz+1+2i+z-i}{z-i} = \frac{(1+i)\,z+1+i}{z-i} = (1+i)\,\frac{z+1}{z-i}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}\,, \qquad g(z) = (1+i)\,\frac{z+1}{z-i}.}$$

9. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On considère les points $A\,(-1)$, $M\,(z)$ et $M'\,(f(z))$. Si $z = -1$, alors $M$ et $A$ sont confondus et donc $A$, $M$ et $M'$ sont alignés. Si $z \neq -1$. Alors,

$$\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(z)+1}{z+1} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(z)}{z+1} \in \mathbb{R}.$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1+i}{z-i} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1+i}{z-i} = \overline{\left(\frac{1+i}{z-i}\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1+i}{z-i} = \frac{1-i}{\overline{z}+i} \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{z} + i\overline{z} + i - 1 = z - iz - i - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad i\,(z+\overline{z}) + 2i = z - \overline{z} \\ &\Leftrightarrow \quad 2i\mathrm{Re}\,(z) + 2i = 2i\mathrm{Im}\,(z) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z) + 1. \end{aligned}$$

On observe que le complexe $-1$ vérifie aussi cette égalité $(0 = -1+1)$ ainsi que le complexe $i$ $(1 = 0+1)$. Conclusion, l'ensemble solution est la droite d'équation $y = x+1$ privé du point $(0,1)$ :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{x + i\,(x+1) = x\,(1+i) + i \mid x \in \mathbb{R}^*\} = \{y - 1 + iy = y\,(1+i) - 1 \mid y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}.}$$

10. On a les égalités suivantes

$$(1+i)^7 = (1+i)\left[(1+i)^2\right]^3 = (1+i)\,[1+2i-1]^3 = (1+i)\,(2i)^3 = (1+i)\,(-8i) = -8i+8.$$

Conclusion,

$$\boxed{(1+i)^7 = 8 - 8i.}$$

*Et en louchant sur la question d'après c'est plutôt engageant.*

11. Par la question précédente, on a $1+i$ qui est UNE racine 7-ième de $8-8i$. Donc pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^7 = 8 - 8i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad z = (1+i)\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}.$$

Conclusion, l'ensemble des racines 7-ièmes de $8-8i$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_7 = \left\{ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \;\middle|\; k \in [\![0;6]\!] \right\}.}$$

12. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = e^z$. On a

$$e^{7z} = 8 - 8i \qquad \Leftrightarrow \qquad Z^7 = 8 - 8i.$$

Donc par la question précédente, on a

$$e^{7z} = 8 - 8i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad Z = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7}\right)}.$$

Posons $x = \mathrm{Re}\,(z)$ et $y = \mathrm{Im}\,(z)$. Dès lors, $Z = e^z = e^x\, e^{iy}$ avec $e^x > 0$. Donc par la pseudo-unicité de la forme polaire :

$$\begin{aligned}
e^{7z} = 8 - 8i \qquad &\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad e^x\, e^{iy} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7}\right)} \\
&\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!],\ l \in \mathbb{Z}, \qquad \begin{cases} e^x = \sqrt{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7} + 2l\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!],\ l \in \mathbb{Z}, \qquad \begin{cases} x = \ln\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7} + 2l\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!],\ l \in \mathbb{Z}, \qquad z = \frac{\ln(2)}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7} + 2l\pi\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{\ln(2)}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7} + 2l\pi\right) \,\middle|\, (k,l) \in [\![0;6]\!] \times \mathbb{Z} \right\}.}$$

13. Soit $k \in [\![1;6]\!]$. On note alors que $\frac{k\pi}{7} \in ]0;\pi[$ et donc $\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right) \neq 0$ et donc $\frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right)$ existe. Procédons par l'absurde. Notons $x_k = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1$. On note que $x_k \in \mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) = i \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{x_k}{2} - i\frac{x_k}{2} = i \\
&\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{x_k}{2} = 0 \\ -\frac{x_k}{2} = 1 \end{cases} \qquad \text{par unicité de la forme algébrique car } \frac{x_k}{2} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On obtient que $0 = -1$ ce qui est impossible. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![1;6]\!], \qquad \frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) \neq i.}$$

14. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Grâce à la question 11., on a les équivalences suivantes :

$$g(z)^7 = 8 - 8i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad g(z) = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7}\right)} = (1+i)\, e^{i\frac{2k\pi}{7}}.$$

Or par la question 8. $g(z) = (1+i)\,\frac{z+1}{z-i}$. D'où

$$\begin{aligned}
g(z)^7 = 8 - 8i \qquad &\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad (1+i)\,\frac{z+1}{z-i} = (1+i)\, e^{i\frac{2k\pi}{7}} \\
&\Leftrightarrow \qquad \frac{z+1}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{7}} \\
&\Leftrightarrow \qquad z + 1 = (z-i)\, e^{i\frac{2k\pi}{7}} \qquad \text{car } z \neq i \\
&\Leftrightarrow \qquad z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{7}}\right) = -1 - i\, e^{i\frac{2k\pi}{7}}.
\end{aligned}$$

Or pour $k \in [\![0;6]\!]$,
$$1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}=1 \qquad \Leftrightarrow \qquad k=0.$$
Dans ce cas, si $k=0$, on a
$$z\left(1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}\right)=0\neq -1-i=-1-i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}.$$
Donc $k=0$ n'est pas solution. Ainsi,
$$g(z)^7=8-8i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k\in[\![1;6]\!], \qquad z=-\frac{1+i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}}.$$
Soit $k\in[\![1;6]\!]$, on a, par factorisation par l'angle moitié,
$$\begin{aligned}
-\frac{1+i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}} &= -\frac{1+\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{7}\right)}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}}\\
&= -\frac{\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{7}\right)}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{7}}}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{7}\right)}+\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{7}\right)}}{\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{7}}-\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{7}}}\\
&= -\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{7}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}\\
&= -i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}.
\end{aligned}$$
En développant par la formule $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$, on trouve que
$$\begin{aligned}
-\frac{1+i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-i+1)\,\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}\\
&= \frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}-1\right)
\end{aligned}$$
Or on a vu à la question 13. que $\frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}-1\right)\neq i$ et est donc bien solution. Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}-1\right)\,\middle|\, k\in[\![1;6]\!]\right\}.}$$

# Problème III - Intégrales

Pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, on pose
$$I(n,p)=\int_0^1 t^n(1-t)^p\,\mathrm{d}t.$$

## Partie 1 : Autour des $I(n,p)$

1. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$. Justifions que $I(n,p)$ existe. La fonction $t\mapsto t^n(1-t)^p$ est continue sur $[0;1]$ en tant que fonction polynomiale. Conclusion,
$$\boxed{\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2, \quad I(n,p)\ \text{existe.}}$$

2. Calculons $I(0,0)$. Si $n = p = 0$ alors,
$$I(0,0) = \int_0^1 t^0 (1-t)^0 \,\mathrm{d}t = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t = 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{I(0,0) = 1.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $I(n,0)$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :
$$I(n,0) = \int_0^1 t^n (1-t)^0 \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1} - 0.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I(n,0) = \frac{1}{n+1}.}$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculons $I(0,p)$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :
$$I(0,p) = \int_0^1 t^0 (1-t)^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^p \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1}\right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{0}{p+1} + \frac{1}{p+1}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad I(0,p) = \frac{1}{p+1}.}$$

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, calculons $I(1,p)$. On a
$$I(1,p) = \int_0^1 t(1-t)^p \,\mathrm{d}t.$$
Posons
$$\forall t \in [0;1], \begin{cases} u(t) = -\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} \\ v(t) = t. \end{cases}$$
Les fonctions $u$ et $v$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et
$$\forall t \in [0;1], \begin{cases} u'(t) = (1-t)^p \\ v'(t) = 1. \end{cases}$$
Donc par le théorème d'intégration par parties :
$$\begin{aligned}
I(1,p) &= \left[-t\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 -\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[-t\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 -\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} \,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{(1-t)^{p+2}}{(p+2)(p+1)}\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= -\frac{(1-1)^{p+2}}{(p+2)(p+1)} + \frac{(1-0)^{p+2}}{(p+2)(p+1)} \\
&= \frac{1}{(p+2)(p+1)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad I(1,p) = \frac{1}{(p+2)(p+1)}.}$$

6. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

(a) A l'aide d'un changement de variable, montrons que $I(n,p) = I(p,n)$. On a

$$I(n,p) = \int 0^1 t^n (1-t)^p \,\mathrm{d}t.$$

Posons $s = 1-t$ i.e. $t = 1-s$. Si $t=0$, $s=1$ et si $t=1$, $s=0$. De plus $s \mapsto 1-s$ est $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}s$. Dès lors, par le théorème de changement de variable,

$$\begin{aligned}
I(n,p) &= \int_1^0 (1-s)^n s^p (-1)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 (1-s)^n s^p \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 s^p (1-s)^n \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 t^p (1-t)^n \,\mathrm{d}t \qquad \text{car la variable d'intégration est muette} \\
&= I(p,n).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad I(n,p) = I(p,n).}$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Recalculons $I(1,p)$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
I(1,p) &= I(p,1) \\
&= \int_0^1 t^p (1-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^p - t^{p+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} - \frac{t^{p+2}}{p+2}\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} - 0 \\
&= \frac{p+2-p-1}{(p+1)(p+2)} \\
&= \frac{1}{(p+2)(p+1)}
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 5.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad I(1,p) = \frac{1}{(p+2)(p+1)}.}$$

7. Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Montrons que $I(n,p) = \frac{p}{n+1} I(n+1, p-1)$. On a

$$I(n,p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p \,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$\forall t \in [0;1], \begin{cases} u(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \\ v(t) = (1-t)^p. \end{cases}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ en tant que fonctions polynomiales et

$$\forall t \in [0;1], \begin{cases} u'(t) = t^n \\ v'(t) = -p(1-t)^{p-1} \end{cases} \qquad \text{car } p > 0.$$

Donc par le théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I(n,p) &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^p\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\left(-p(1-t)^{p-1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+1}(0)^p - \frac{0^{n+1}}{n+1} + \frac{p}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{p-1}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{p}{n+1} I(n+1,p-1) \qquad \text{car } 0^p = 0 \text{ car } p \neq 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \qquad I(n,p) = \frac{p}{n+1} I(n+1,p-1).}$$

8. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculons $I(2,p)$. Par la question précédente avec $\tilde{p} = p+1$ i.e. $p = \tilde{p} - 1$ et $n+1 = 2$ i.e. $n = 1$, on a

$$I(2,p) = I(n+1,\tilde{p}-1) = \frac{n+1}{\tilde{p}} I(n,\tilde{p}) = \frac{2}{p+1} I(1,p+1).$$

Donc par la question 5.

$$I(2,p) = \frac{2}{p+1}\frac{1}{(p+3)(p+2)} = \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad I(2,p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}.}$$

9. Soit $p \in \mathbb{N}$. Recalculons $I(2,p)$. Par la question 6.a

$$\begin{aligned} I(2,p) &= I(p,2) \\ &= \int_0^1 t^p (1-t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^p \left(1 - 2t + t^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^p - 2t^{p+1} + t^{p+2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} - 2\frac{t^{p+2}}{p+2} + \frac{t^{p+3}}{p+3}\right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{p+1} - 2\frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} \\ &= \frac{(p+2)(p+3) - 2(p+1)(p+3) + (p+1)(p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\ &= \frac{p^2 + 5p + 6 - 2p^2 - 8p - 6 + p^2 + 3p + 2}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\ &= \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}. \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question précédente *(c'est beau !)*

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad I(2,p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}.}$$

10. A l'aide d'une récurrence sur $n$, montrons que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ I(n,p) = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall p \in \mathbb{N},\ I(n,p) = \frac{p!n!}{(n+p+1)!} \text{ »}.$$

Procédons par récurrence.

*Initialisation.* Si $n = 0$, par la question 4. on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I(0,p) = \frac{1}{p+1}.$$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{p!n!}{(n+p+1)!} = \frac{p!0!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

*Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\mathscr{P}(n) \ \Rightarrow\ \mathscr{P}(n+1))$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ aussi est vraie. Par hypothèse de récurrence,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ I(n,p) = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}.$$

Par la question 7. pour $p \geqslant 1$,

$$I(n,p) = \frac{p}{n+1} I(n+1, p-1)$$

Ou encore pour $p+1 \geqslant 1$ i.e. $p \geqslant 0$,

$$I(n,p+1) = \frac{p+1}{n+1} I(n+1,p).$$

Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I(n+1,p) = \frac{n+1}{p+1} I(n,p+1).$$

Donc par l'hypothèse de récurrence appliquée à $p+1$,

$$I(n,p+1) = \frac{(p+1)!n!}{(n+p+2)!}.$$

Ainsi,

$$I(n+1,p) = \frac{n+1}{p+1}\frac{(p+1)!n!}{(n+p+2)!} = \frac{p!(n+1)!}{(n+1+p+1)!}.$$

Ceci étant vraie pour $p \in \mathbb{N}$ quelconque, cela démontre $\mathscr{P}(n+1)$.

*Conclusion,*

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ I(n,p) = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}.}$$

11. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de binôme de Newton, écrivons sous forme de somme $t^n (1-t)^p$. On a par la formule du binôme de Newton appliquée à $a = -t$ et $b = 1$,

$$(1-t)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-t)^k 1^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k t^k.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^n (1-t)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k t^{n+k}.}$$

(b) Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$. En intégrant l'égalité précédente, possible car les fonctions sont continues en tant que fonctions polynomiales, on trouve :

$$\int_0^1 t^n (1-t)^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k t^{n+k} \,\mathrm{d}t.$$

On reconnait à gauche $I(n,p)$ et par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I(n,p) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{n+k} \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \left[ \frac{t^{n+k+1}}{n+k+1} \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \frac{1}{n+k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1} = I(n,p).$$

Conclusion, par la question 10.

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1} = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}.}$$

12. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $J(n,p) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t+1)^n (1-t)^p \,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminons deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'application $s : t \mapsto at + b$ vérifie

$$s([-1;1]) = [0;1].$$

Si $a = 0$, alors $s([-1;1]) = \{b\} \neq [0;1]$. Donc $a = 0$ n'est pas solution. Supposons $a \neq 0$. Alors la fonction $s$ est continue et strictement monotone : strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$. Donc par le théorème de la bijection,

$$s([-1;1]) = [s(-1); s(1)] \text{ si } a > 0 \quad \text{OU} \quad s([-1;1]) = [s(1); s(-1)] \text{ si } a < 0.$$

On a $s(-1) = -a + b$ et $s(1) = a + b$. Donc

$$\begin{cases} -a+b=0 \\ a+b=1 \\ a>0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} -a+b=1 \\ a+b=0 \\ a<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2b=1 \\ a+b=1 \\ a>0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \text{OU} \quad \begin{cases} 2b=1 \\ a+b=0 \\ a<0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=1-b=\frac{1}{2} \\ a>0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=-b=-\frac{1}{2} \\ a<0. \end{cases}$$

On obtient donc deux couples solutions donc une solution est donnée par

$$\boxed{a = b = \frac{1}{2}, \quad \forall t \in [-1;1], \; s(t) = \frac{t+1}{2}.}$$

(b) Calculons $J(n,p)$. Par définition,

$$J(n,p) = \int_{-1}^{1} (t+1)^n (1-t)^p \,\mathrm{d}t.$$

Posons $s = \frac{t+1}{2}$ i.e. $t = 2s - 1$. Si $t = -1$, $s = 0$, si $t = 1$, $s = 1$. De plus, $s \mapsto 2s - 1$ est $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}s$. Donc par le théorème de changement de variable,

$$\begin{aligned} J(n,p) &= \int_0^1 (2s-1+1)^n (1-2s+1)^p \, 2\,\mathrm{d}s \\ &= 2\int_0^1 (2s)^n (2-2s)^p \,\mathrm{d}s \\ &= 2\int_0^1 2^n s^n 2^p (1-s)^p \,\mathrm{d}s \\ &= 2^{n+p+1}\int_0^1 s^n (1-s)^p \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

La variable d'intégration étant muette, on trouve bien que

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad J(n,p) = 2^{n+p+1} I(n,p).}$$

*Vérification : si $n = p = 1$, on a*

$$\begin{aligned} J(1,1) &= \int_{-1}^{1} (t+1)(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} 1 - t^2 \,\mathrm{d}t = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{t=-1}^{1} \\ &= 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) \\ &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

*D'autre part, $2^{1+1+1} I(1,1) = 8\frac{1!1!}{(1+1+1)!} = \frac{8}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ OK !*

## Partie 2 : $W$ comme Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad K(n,p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

13. Calculons $W_0$.Par définition, on a

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\,\mathrm{d}u = [-\cos(u)]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} = -0+1.$$

Conclusion,

$$\boxed{W_0 = 1.}$$

14. Calculons $V = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Posons

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \begin{cases} u(t) = -\cos(t) \\ v(t) = t. \end{cases}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \begin{cases} u'(t) = \sin(t) \\ v(t) = 1. \end{cases}$$

Donc par le théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [-t\cos(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [\sin(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{V = 1.}$$

15. Calculons $W_1$. Par définition,

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(u)\,\mathrm{d}u.$$

Linéarisons $\sin^3(u)$. En passant par les complexes par exemple. Soit $u \in \mathbb{R}$. On a par la formule d'Euler,

$$\begin{aligned} \sin^3(u) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{iu} - \mathrm{e}^{-iu}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3iu} - 3\,\mathrm{e}^{iu} + 3\,\mathrm{e}^{-iu} - \mathrm{e}^{-3iu}}{-8i} \\ &= \frac{1}{-4}\frac{\mathrm{e}^{3iu} - \mathrm{e}^{-3iu}}{2i} + \frac{3}{4}\frac{\mathrm{e}^{iu} - \mathrm{e}^{iu}}{2i} \\ &= -\frac{1}{4}\sin(3u) + \frac{3}{4}\sin(u). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{4}\sin(3u) + \frac{3}{4}\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{4}\left[-\frac{\cos(3u)}{3}\right]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}W_0 \\ &= -\frac{1}{4}\left(-0+\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{4} \qquad \text{par la question 13.} \\ &= \frac{9-1}{12} \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{W_1 = \frac{2}{3}.}$$

16. Montrons que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(t) \in [0;1]$. Donc
$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin^{2n+1}(t) \leqslant \sin^{2n+3}(t).$$
Donc par croissance de l'intégrale, car les fonctions sont continues et que $0 < \frac{\pi}{2}$, on a
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+3}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \Leftrightarrow \qquad W_n \leqslant W_{n+1}.$$
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en conclut que
$$\boxed{\text{la suite } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

17. Montrons que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(t) \geqslant 0$ et donc $\sin^{2n+1}(t) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale car $\sin^{2n+1}$ est continue et $0 < \frac{\pi}{2}$, on a
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad W_n \geqslant 0.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \geqslant 0.}$$

18. Par les deux questions précédentes, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Donc par le théorème de convergence monotone, on en conclut que
$$\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

19. A l'aide du changement de variable $v = \pi - u$, exprimons $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u$ en fonction de $W_n$. Posons $v = \pi - u$ i.e. $u = \pi - v$. Si $u = \frac{\pi}{2}$, alors $v = \frac{\pi}{2}$. Si $u = \pi$ alors $v = 0$. De plus, $v \mapsto \pi - v$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}v$. Donc par le théorème de changement de variable,
$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^{2n+1}(\pi - v)(-1)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(\pi - v)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(v)\,\mathrm{d}v \qquad \text{car pour tout } v \in \mathbb{R}, \sin(\pi - v) = \sin(v).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u = W_n.}$$

20. Calculons $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u$ en fonction de $W_n$. Par la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= W_n + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= W_n + W_n \qquad \text{par la question précédente} \\ &= 2W_n.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u = 2W_n.}$$

21. Linéarisons $\cos(\theta)\sin(\theta)$ et déduisons-en une expression de $K(n,n)$ en fonction de $W_n$. On sait que

$$\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{\sin(2\,\theta)}{2}.}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}K(n,n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)\sin^{2n+1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta)\sin(\theta))^{2n+1}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(2\,\theta)}{2}\right)^{2n+1}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(2\,\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.\end{aligned}$$

Posons $t = 2\,\theta$ i.e. $\theta = \frac{t}{2}$. Si $\theta = 0$ alors $t = 0$ si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $t = \pi$. La fonction $t \to \frac{t}{2}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$ et $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$. Donc par le théorème de changement de variable,

$$K(n,n) = \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(t)\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t. = \frac{1}{2^{n+2}}W_n.$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{K(n,n) = \frac{1}{2^{n+1}}W_n.}$$

22. Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide du changement de variable $t = \cos^2(\theta)$, exprimons $I(n,p)$ en fonction de $K(n,p)$. On a

$$I(n,p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p\,\mathrm{d}t.$$

Posons $t = \cos^2(\theta)$ i.e. $\theta = \arccos\left(\sqrt{t}\right)$ car $t \geqslant 0$ et $\sqrt{t} \in \left[0;\sqrt{1}\right] = [0;1] \subset [-1;1]$. Si $t = 0$, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$. Si $t = 1$, $\theta = \arccos(1) = 0$. La fonction $\theta \to \cos^2(\theta)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\mathrm{d}t = -2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
I(n,p) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{2n}(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)^p(-2\sin(\theta)\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(\theta)\left(\sin^2(\theta)\right)^p \sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2K(n,p).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I(n,p) = 2K(n,p).}$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 10.

$$\frac{n!n!}{(n+n+1)!} = I(n,n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = I(n,n).$$

Donc par la question précédente,

$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 2K(n,n).$$

Donc par la question 21.

$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 2\frac{1}{2^{n+1}}W_n = \frac{1}{2^n}W_n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Or par la question 18. $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Conclusion,

$$\boxed{\left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

*Les intégrales $W_n$ sont appelées intégrales de Wallis. Elles permettent entre autres de déterminer la constante qui apparaît de l'équivalent de $n!$ (formule de Stirling). C'est une magnifique démonstration.*

## Problème IV - Fonctions usuelles

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right). \end{array}$$

### Partie 1 : Etude de $f$

1. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \leqslant 1.$$

La fonction arccos est définie sur $[-1;1]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \in ]0;1] \subset [-1;1]$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. L'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0. De plus par parité de la fonction ch, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(-x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(-x)}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) = f(x).$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

3. On sait que $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par continuité de la fonction arccos en 0, on a $\arccos(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Par composition, on obtient
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) = \lim_{u\to 0} \arccos(u) = \frac{\pi}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$
Or la fonction $f$ est pair et donc son graphe est symétrique par rapport à l'axe $(Oy)$. On en déduit donc directement que
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

4. Nous avons déjà vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \in ]0;1]$. Or la fonction arccos n'est dérivable que sur $]-1;1[$. Par conséquent pour $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences
$$\begin{array}{llllll} x \in \mathcal{D} & \Leftrightarrow & \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \in ]-1;1[ & \Leftrightarrow & \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \neq 1 & \\ & & & \Leftrightarrow & 1 \neq \operatorname{ch}(x) & \textit{car } \operatorname{ch}(x) > 0 \\ & & & \Leftrightarrow & x \neq 0. & \end{array}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}^*.}$$

5. Soit $x \in \mathcal{D}$. On a
$$f'(x) = \frac{-\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)^2}} = \frac{\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(x)-1}{\operatorname{ch}^2(x)}}} = \frac{\operatorname{sh}(x)\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)}}{\operatorname{ch}^2(x)\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)-1}}.$$
Or $\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)} = \operatorname{ch}(x)$ car $\operatorname{ch}(x) > 0$. De plus $\operatorname{ch}^2(x) - 1 = \operatorname{sh}^2(x)$. Ainsi,
$$f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)\sqrt{\operatorname{sh}^2(x)}} = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(x)}}\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$$
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{sh}(x) > 0$ et donc $\sqrt{\operatorname{sh}^2(x)} = \operatorname{sh}(x)$. Donc
$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}(x)}\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}.$$
D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $\operatorname{sh}(x) < 0$ et donc
$$\forall x < 0, \qquad f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{-\operatorname{sh}(x)}\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = -\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}.$$
Notons que $\mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^* = \mathcal{D}$, nous avons donc bien traité tous les cas. Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D} = \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

6. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\text{ch}(x)} > 0$, on en déduit que pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ et pour tout $x < 0$, $f'(x) < 0$. Ainsi la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et donc sur $\mathbb{R}_-$ par continuité ($f$ est continue sur son domaine de définition comme composée de fonctions qui sont continues sur leurs domaines de définition) et de même $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (ce qui est cohérent avec sa parité). On sait par une question précédente que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, $f(0) = \arccos\left(\frac{1}{\text{ch}(0)}\right) = \arccos(1) = 0$. Conclusion, on obtient le tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
 & \frac{\pi}{2} & & & & \frac{\pi}{2} \\
f & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & 0 & & \\
\hline
\end{array}$$

7. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \text{e}^x$. Alors,

$$\begin{aligned}
\text{ch}(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X + \frac{1}{X}}{2} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad X^2 + 1 = 4X \qquad \textit{car } X > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad X^2 - 4X + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Soit $\Delta$ le discriminant associé. On a $\Delta = 16 - 4 = 12$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\text{ch}(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad X = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3} \text{ OU } X = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{e}^x = 2 + \sqrt{3} \text{ OU } \text{e}^x = 2 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

On note que $2 + \sqrt{3} > 0$ et $2 - \sqrt{3} > 0$ (car $2 > \sqrt{3}$ car $4 > 3$). Conclusion,

$$\boxed{\text{ch}(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ OU } x = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right).}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}\left(\left\{\frac{\pi}{3}\right\}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \\
&\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right) = \frac{\pi}{3} = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\text{ch}(x)} = \frac{1}{2} \qquad \textit{par injectivité de la fonction } \arccos \\
&\Leftrightarrow \quad \text{ch}(x) = 2.
\end{aligned}$$

Donc par la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{f^{-1}\left(\left\{\frac{\pi}{3}\right\}\right) = \left\{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right); \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)\right\}.}$$

(c) Par la question précédente, on en complète le tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$ | | $0$ | | $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\searrow$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |

La fonction $f$ étant continue et strictement monotone sur $]-\infty;0]$ et sur $[0;+\infty[$, par application du théorème de la bijection, on en déduit que

$$\boxed{f^{-1}\left(\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]-\infty;\ln\left(2-\sqrt{3}\right)\right]\cup\left[\ln\left(2+\sqrt{3}\right);+\infty\right[.}$$

## Partie 2 : Construction d'une réciproque

8. Soit $g$ la restriction de $f$ à $\mathbb{R}_+$. Par les questions précédentes, on sait que $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Il en est donc de même de $g$. Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ définit une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } J=g\left(\mathbb{R}_+\right)=f\left(\mathbb{R}_+\right)=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[}$$

On note $\varphi$ la réciproque de $g$.

9. (a) Soit $x>0$. Par la partie 1, on sait que $f$ est dérivable en $x$ et $f'(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$. D'autre part, on a

$$\cos\left(f(x)\right)=\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)\right)=\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}.$$

$\cos\arccos$ *ne pose pas de problème au contraire de* $\arccos\cos$*...*

Conclusion,

$$\boxed{\forall x>0,\qquad f'(x)=\cos\left(f(x)\right).}$$

(b) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}>0$. Donc il en est de même pour $g$ notamment $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x>0$, $g'(x)=f'(x)\neq 0$. Par le théorème de la dérivabilité de la fonction réciproque, on en déduit que $\varphi$ est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\varphi'(x)=\frac{1}{g'\left(\varphi(x)\right)}=\frac{1}{f'\left(\varphi(x)\right)}.$$

Or on a $g\left(]0;+\infty[\right)=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\varphi\left(\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0;+\infty[$. Autrement dit pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\varphi(x)>0$. Donc par la question précédente,

$$\varphi'(x)=\frac{1}{f'\left(\varphi(x)\right)}=\frac{1}{\cos\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)}=\frac{1}{\cos\left(x\right)},$$

car $\varphi(x)\geqslant 0$ et donc $f\left(\varphi(x)\right)=g\left(\varphi(x)\right)=x$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\qquad \varphi'(x)=\frac{1}{\cos(x)}.}$$

10. Soit $x\in J=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $0<\cos(x)\leqslant 1$ et $0\leqslant\sin\left(x\right)<1$. Par conséquent,

$$0<1\leqslant\frac{1}{\cos(x)}\qquad\text{et}\qquad 1\leqslant 1+\sin(x)<2.$$

Donc par produit,

$$\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant 1 > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } h : x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right) \text{ est bien définie sur } J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[.}$$

11. La fonction $h$ est bien définie sur $J$ et est même dérivable sur $J$ comme composée de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition. De plus pour tout $x \in J$,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)'}{\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - (1+\sin(x))(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin(x) + \sin^2(x)}{\cos(x)(1+\sin(x))} \\
&= \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)(1+\sin(x))} \\
&= \frac{1}{\cos(x)}.
\end{aligned}$$

Donc par la question 9.b, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $h'(x) = \varphi'(x)$. Par conséquent,

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \varphi(x) = h(x) + C.$$

Or par le théorème de la bijection, on sait que $\varphi$ est continue sur $J$ et donc notamment en 0. De plus $h$ est continue sur $J$ comme composée de fonctions continues sur leurs ensembles de définition. Donc par passage à la limite quand $x \to 0$,

$$\varphi(0) = \lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x \to 0} h(x) + C = h(0) + C.$$

Ainsi,

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \varphi(x) = h(x) + C.$$

Déterminons $C$. En évaluant en 0 par exemple. Puisque $g(0) = f(0) = 0$, on en déduit que $\varphi(0) = 0$ et donc

$$C = \varphi(0) - h(0) = 0 - \ln\left(\frac{1+\sin(0)}{\cos(0)}\right) = -\ln(1) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \varphi(x) = h(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right).}$$

## Partie 3 : Une équation

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

(E) $$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) + \arccos\left(\frac{8}{5\operatorname{ch}(x)}\right).$$

On considère également l'équation suivante d'inconnue $y \in \mathbb{R}$,

(F) $$\arccos(y) - \arcsin(y) = \arccos\left(\frac{8y}{5}\right).$$

12. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{D}_F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \frac{8y}{5} \leqslant 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ -\frac{5}{8} \leqslant y \leqslant \frac{5}{8} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{8} \leqslant y \leqslant \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}_F = \left[-\frac{5}{8}; \frac{5}{8}\right].}$$

13. Soit $y \in \mathcal{D}_F$. Supposons que $y$ soit une solution de (F). Alors

$$\arccos(y) - \arcsin(y) = \arccos\left(\frac{8y}{5}\right).$$

En composant par la fonction cosinus, on obtient,

$$\begin{aligned} & \cos(\arccos(y) - \arcsin(y)) = \cos\left(\arccos\left(\frac{8y}{5}\right)\right) = \frac{8y}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & \cos(\arccos(y))\cos(\arcsin(y)) + \sin(\arccos(y))\sin(\arcsin(y)) = \frac{8y}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & y\cos(\arcsin(y)) + y\sin(\arccos(y)) = \frac{8y}{5}. \end{aligned}$$

Or on sait que $\cos^2(\arcsin(y)) = 1 - \sin^2(\arcsin(y)) = 1 - y^2$. De plus, $\arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(\arcsin(y)) \geqslant 0$. Ainsi,

$$\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}.$$

De même, on a $\sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}$. Donc

$$\begin{aligned} \text{(F)} \quad &\Rightarrow \quad y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-y^2} = \frac{8y}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad 2y\sqrt{1-y^2} = \frac{8y}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad 2y\left(\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{5}\right) = 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{y \text{ solution de (F)} \quad \Rightarrow \quad 2y\left(\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{5}\right) = 0.}$$

14. On procède par analyse-synthèse. *Analyse.* Soit $y \in \mathcal{D}_F$. Supposons $y$ solution de (F). Alors, par la question précédente, $2y\left(\sqrt{1-y^2}-\frac{4}{5}\right)=0$. Donc $y=0$ ou

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-y^2}-\frac{4}{5}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-y^2}=\frac{4}{5}\\
&\Leftrightarrow \quad 1-y^2=\frac{16}{25} \qquad \textit{car } 1-y^2\geqslant 0 \textit{ pour } y\in\mathcal{D}_F\\
&\Leftrightarrow \quad y^2=\frac{9}{25}\\
&\Leftrightarrow \quad y=\frac{3}{5} \ \text{ OU } \ y=-\frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Ainsi, si $y$ est une solution de (F), alors $y \in \left\{-\frac{3}{5};0;\frac{3}{5}\right\}$.

*Synthèse.* L'énoncé nous assure qu'il y a au moins trois solutions. N'ayant que trois candidats, on en conclut que chacune de ces valeurs est bien solution.

Conclusion, l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F=\left\{-\frac{3}{5};0;\frac{3}{5}\right\}.}$$

15. Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons $y=\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \text{ solution (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x)=\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)+\arccos\left(\frac{8}{5\operatorname{ch}(x)}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)+\arccos\left(\frac{8}{5\operatorname{ch}(x)}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \arccos(y)=\arcsin(y)+\arccos\left(\frac{8y}{5}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad y \text{ solution de (F)}\\
&\Leftrightarrow \quad y=-\frac{3}{5} \ \text{ OU } \ y=0 \ \text{ OU } y=\frac{3}{5}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}=-\frac{3}{5} \ \text{ OU } \ \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}=0 \ \text{ OU } \ \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}=\frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}>0$. Par conséquent,

$$x \text{ solution (E)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}=\frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ch}(x)=\frac{5}{3}.$$

Posons $X=\mathrm{e}^x>0$. On a

$$\begin{aligned}
x \text{ solution (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{X+\frac{1}{X}}{2}=\frac{5}{3}\\
&\Leftrightarrow \quad X+\frac{1}{X}=\frac{10}{3}\\
&\Leftrightarrow \quad X^2-\frac{10}{3}X+1=0.
\end{aligned}$$

Soit $\Delta$ le discriminant associé : $\Delta=\frac{100}{9}-4=\frac{100-36}{9}=\frac{64}{9}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x \text{ solution (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad X=\frac{\frac{10}{3}-\frac{8}{3}}{2}=\frac{1}{3} \ \text{ OU } \ X=\frac{\frac{10}{3}+\frac{8}{3}}{2}=3\\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x=\frac{1}{3} \ \text{ OU } \ \mathrm{e}^x=3\\
&\Leftrightarrow \quad x=-\ln(3) \ \text{ OU } \ x=\ln(3).
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \{-\ln(3); \ln(3)\}.}$$

*Pour les curieux qui n'aiment pas admettre de résultat. Voici comment il était possible de démontrer que les trois réels* $-\frac{3}{5}$, $0$ *et* $\frac{3}{5}$ *sont bien solutions de* (F)*. Posons* $h : y \mapsto \arccos(y) - \arcsin(y)$*. La fonction* $h$ *est définie et continue sur* $[-1; 1]$ *et dérivable sur* $]-1; 1[$*. De plus, pour tout* $y \in ]-1; 1[$*,*

$$h'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-y^2}}.$$

*On note donc que pour tout* $y \in ]-1; 1[$*,* $h'(y) < 0$*. Donc la fonction* $h$ *est strictement décroissante sur* $]-1; 1[$ *et par continuité sur* $[-1; 1]$*. Or* $h(-1) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ *et* $h(1) = 0 - \frac{\pi}{2}$*, on obtient donc le tableau suivant :*

| $y$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $h$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\searrow$ | $-\frac{\pi}{2}$ |

*Poursuivons, on a* $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$ *et* $h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$*. On en déduit donc le tableau restreint suivant :*

| $y$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $h$ | $\pi$ | $\searrow$ | $0$ |

*Ainsi, pour tout* $y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$*, on a* $h(y) \in [0; \pi]$*. Par conséquent, pour tout* $y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ *et tout* $u \in [-1; 1]$*, l'implication suivante est vraie*

$$\cos(h(y)) = u \Rightarrow h(y) = \arccos(u).$$

*C'était le seul endroit où dans notre raisonnement précédent nous avions perdu l'équivalence, nous avions écrit que* $h(y) = \arccos\left(\frac{8y}{5}\right) \Rightarrow \cos(h(y)) = \cos\left(\arccos\left(\frac{8y}{5}\right)\right) = \frac{8y}{5}$*. La réciproque et donc l'équivalence pour tout* $y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ *est donc vraie. Il est donc possible de reprendre tout le raisonnement avec des équivalences pour* $y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$*. Enfin, on note que* $-\frac{3}{5}$*,* $0$*,* $\frac{3}{5}$ *sont trois éléments de* $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ *ce qui achève la démonstration.*