Epreuve de mathématiques 4
2024-2025

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Exercice 1 - Calculs

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I_1) : $\sqrt{x^2-9} > x-5$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I_2) : $\frac{2x-3}{x^2-4} \leqslant 1$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I_3) : $|x+3|+|3x-1| < 4$.

Problème 2 - Equations différentielles

Partie 1 : A l'ordre 2

On considère les équations différentielles suivantes d'inconnue y, une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} (E_1) & \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x \\ (E_2) & \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^{(1+i)x} \\ (E_3) & \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x \cos(x). \end{array}$$

1. Préciser (E_0) l'équation différentielle homogène associée aux équations (E_1), (E_2) et (E_3) puis la résoudre. *On donnera les solutions réelles sous forme d'ensemble et d'espace engendré.*
2. Déterminer $\mathscr{S}_{E_1}$ l'ensemble des solutions réelles de (E_1).
3. (a) Sans le calculer, justifier proprement qu'il existe un unique élément $y_1 \in \mathscr{S}_{E_1}$ vérifiant $y_1(0) = 3$ et $y_1'(0) = 6$
   (b) Déterminer y_1.
4. Déterminer y_{p2} une solution complexe de (E_2).
5. En déduire $\mathscr{S}_{E_3}$ l'ensemble des solutions réelles de (E_3).

Partie 2 : A l'ordre 1

On pose $I =]0;+\infty[$. On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction dérivable sur I :

$$(F) \qquad \forall x \in I,\ y'(x) + \frac{2}{x\left(x^2+1\right)} y(x) = \frac{1+x^2}{2x^4+2x^3+x^2}.$$

6. (a) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in I,\ \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
   (b) En déduire sur I l'ensemble des primitives de $\alpha : x \mapsto \frac{2}{x(x^2+1)}$.
7. Déterminer sur I l'ensemble des primitives de $\beta : x \mapsto \frac{1}{2x^2+2x+1}$.
8. Préciser (F_0) l'équation homogène associée à (F) et la résoudre. *On donnera les solutions sous forme d'ensemble et d'espace engendré.*
9. En déduire $\mathscr{S}_F$ l'ensemble des solutions de (F).

Partie 3 : A l'ordre 2 aux coefficients variables

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $I =]0; +\infty[$:

$$(G_0) \qquad \forall x \in I,\ y''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{2}{1+x^2}y(x) = 0.$$

10. Soit $R_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Déterminer l'ensemble des fonctions $y_R \in R_1$ solutions de (G_0).
11. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On pose pour tout $x \in I$, $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Justifier que z est deux fois dérivable sur I et vérifier que

$$y \text{ solution de } (G_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad z' \text{ solution de } (F_0).$$

12. En déduire $\mathscr{S}_{G_0}$ l'ensemble des solutions de (G_0).

Partie 4 : Une solution particulière

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur I :

$$(G) \qquad \forall x \in I,\ y''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{2}{1+x^2}y(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x).$$

Soient A et B deux fonctions dérivables sur I telles que

$$\forall x \in I, \qquad xA'(x) + \left(x^2-1\right)B'(x) = 0.$$

On pose alors

$$\forall x \in I, \qquad y_p(x) = xA(x) + \left(x^2-1\right)B(x).$$

13. Déterminer l'ensemble des primitives sur I de $f : x \mapsto x\ln(x)$.
14. Déterminer l'ensemble des primitives sur I de $g : x \mapsto (1-x^2)\ln(x)$.
15. Calculer y_p' et y_p'' en fonction de A, B, A' et B'. *On ne veut pas de A'' ni de B''.*
16. Montrer que y_p est solution de (G) si et seulement si

$$\forall x \in I, \qquad A'(x) + 2xB'(x) = \left(x^2+1\right)\ln(x).$$

17. En déduire A' et B'.
18. Conclure en donnant y_p.

Problème 3 - Matrices

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, on pose $C = A - B$.

Partie 1 : Puissances de A, méthode 1

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $T = P^{-1}AP$. *On doit obtenir une matrice de la forme* $\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$.
3. Vérifier que $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(T)$.
4. Calculer T^2 et T^3.
5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T^n.
6. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n. *L'exprimer explicitement en fonction de ses coefficients.*

Partie 2 : Puissances de A, méthode 2

7. Calculer C.
8. Calculer BC et CB.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = B^n + C^n$.
10. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C^n.

On pose

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D^n.
12. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E^n.
13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = D + nE$.
14. Retrouver alors le résultat de la question 6.

Partie 3 : Exponentielle de matrice

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Si chacun des coefficients de la matrice $S_n(M)$ converge lorsque $n \to +\infty$, on dit que la suite de matrice $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note alors

$$\exp(M) = \lim_{n\to+\infty} S_n(M).$$

On admet que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ converge toujours et donc $\exp(M)$ existe bien.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on admet également le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

15. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Préciser $S_0(M)$, $S_1(M)$ et $S_2(M)$.
16. Soient $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si M est symétrique alors $S_n(M)$ l'est également.
17. *Ceci n'est pas une question.*
18. Montrer que $\exp(A) = \exp(B) + \exp(C) - I_3$.
19. Exprimer $\exp(C)$ en fonction de C.
20. A l'aide de la question 13., exprimer $\exp(B)$ en fonction de B et E.
21. En déduire $\exp(A)$ en fonction de B, E et C.
22. Montrer que $\exp(B)\exp(C) = \exp(A)$.
23. Exprimer $\exp(A)$ en fonction de P, P^{-1} et $\exp(T)$.
24. Montrer que $\exp(T) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}$.