Corrigé du Devoir Surveillé 4
Calculs dans $\mathbb{R}$, équations différentielles, matrices

Exercice I - Calculs

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_1) : $\sqrt{x^2-9} > x-5$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2-9} \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-9 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geqslant 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -3 \text{ OU } x \geqslant 3.$$

Soit $x \in \left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;+\infty\right[$. Premier cas, $x-5<0$ i.e. $x<5$. Alors, on a bien $\sqrt{x^2-9} \geqslant 0 > x-5$. Donc $\mathscr{S}_1 = \left]-\infty;-3\right] \cup [3;5]$.

Second cas, $x-5 \geqslant 0$ i.e. $x \geqslant 5$. Alors,

$$\begin{aligned}
(I_1) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-9 > (x-5)^2 \quad \text{car } \begin{cases} x^2-9 \geqslant 0 \\ x-5 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-9 > x^2-10x+25 \\
&\Leftrightarrow \quad 10x > 34 \\
&\Leftrightarrow \quad x > \frac{17}{5}.
\end{aligned}$$

Or $\frac{17}{5} < \frac{25}{5} = 5$. Donc $\mathscr{S}_2 = \left[5;+\infty\right[$.

Conclusion, l'ensemble solution de (I_1) est

$$\boxed{\mathscr{S}_{I_1} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \left]-\infty;-3\right] \cup [3;5] \cup \left[5;+\infty\right[= \left]-\infty;-3\right] \cup \left[3;+\infty\right[.}$$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I_2) : $\frac{2x-3}{x^2-4} \leqslant 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x^2-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2 \text{ OU } x=2.$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$. On a $x^2-4>0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2>4 \quad \Leftrightarrow \quad x<-2 \text{ OU } x>2$.

Premier cas $x \in \left]-\infty;-2\right[\cup \left]2;+\infty\right[$. On a

$$\begin{aligned}
(I_2) : \quad \frac{2x-3}{x^2-4} \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x-3 \leqslant x^2-4 \qquad x^2-4>0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-2x-1 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 4+4 = 8$. Les racines associées sont $\frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$. Ainsi,

$$(I_2) \quad \Leftrightarrow \quad 1-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{2}.$$

On sait que $\sqrt{2}>1$ donc $1+\sqrt{2} > 2 > 0 > 1-\sqrt{2}$. De plus, $1-\sqrt{2} > -2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} < 3 \;\Leftrightarrow\; 2 < 9$ ce qui est vrai. Donc

$$1+\sqrt{2} > 2 > 1-\sqrt{2} > -2$$

Donc dans ce cas,

$$\mathscr{S}_1 = \left]2;1+\sqrt{2}\right].$$

Second cas, $x \in \left]-2;2\right[$. On a

$$\begin{aligned}
(I_2) : \quad \frac{2x-3}{x^2-4} \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x-3 \geqslant x^2-4 \qquad x^2-4<0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-2x-1 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Les racines sont toujours $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$ avec $-2<1-\sqrt{2}<2<1+\sqrt{2}$. Donc dans ce cas

$$\mathscr{S}_1 = \left[1-\sqrt{2};2\right[.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (I_2) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{I_2} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \left[1-\sqrt{2};2\right[\cup \left]2;1+\sqrt{2}\right].}$$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $(I_3) : |x+3|+|3x-1|<4$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $x+3\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant -3$ et $3x-1\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geqslant \frac{1}{3}$.

   Premier cas, $x\leqslant -3$. Alors,

$$\begin{aligned} (I_3) \quad &\Leftrightarrow \quad -x-3-3x+1<4\\ &\Leftrightarrow \quad -6<4x\\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2}<x. \end{aligned}$$

   Puisque $-3<-\frac{3}{2}$, dans ce cas, $\mathscr{S}_1=\emptyset$.

   Deuxième cas, $-3\leqslant x\leqslant \frac{1}{3}$. Alors,

$$\begin{aligned} (I_3) \quad &\Leftrightarrow \quad x+3-3x+1<4\\ &\Leftrightarrow \quad 0<2x\\ &\Leftrightarrow \quad 0<x. \end{aligned}$$

   Dans ce cas, $\mathscr{S}_2=\left]0;\frac{1}{3}\right]$.

   Troisième cas, $x\geqslant \frac{1}{3}$. Alors,

$$\begin{aligned} (I_3) \quad &\Leftrightarrow \quad x+3+3x-1<4\\ &\Leftrightarrow \quad 4x<2\\ &\Leftrightarrow \quad x<\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Dans ce cas, $\mathscr{S}_3=\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[$.

   Conclusion, l'ensemble des solutions de (I_3) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{I_3} = \mathscr{S}_1\cup\mathscr{S}_2\cup\mathscr{S}_3 = \emptyset \cup \left]0;\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[= \left]0;\frac{1}{2}\right[.}$$

Problème II - Equations différentielles

Partie 1 : A l'ordre 2

On considère les équations différentielles suivantes d'inconnue y, une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &(E_1) \qquad \forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)-2y'(x)+2y(x)=\mathrm{e}^{x}\\ &(E_2) \qquad \forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)-2y'(x)+2y(x)=\mathrm{e}^{(1+i)x}\\ &(E_3) \qquad \forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)-2y'(x)+2y(x)=\mathrm{e}^{x}\cos(x). \end{aligned}$$

1. Précisons et résolvons (E_0). L'équation homogène associée à (E_1), (E_2) et (E_3) est donnée par

$$\boxed{(E_0) \qquad \forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)-2y'(x)+2y(x)=0.}$$

L'équation caractéristique associée est donnée par

$$(E_c) \qquad r^2 - 2r + 2 = 0.$$

Son discriminant vaut $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$. Donc les racines associées sont $\frac{2\pm 2i}{2} = 1 \pm i$. Dès lors l'ensemble des solutions réelles de (E_0) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{E_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \left(A\cos(x) + B\sin(x) \right) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

ou encore

$$\boxed{\mathscr{S}_{E_0} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \cos(x) \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \sin(x) \end{array} \right).}$$

2. Déterminons $\mathscr{S}_{E_1}$ l'ensemble des solutions réelles de (E_1). Par la question précédente, nous avons déjà l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Cherchons une solution particulière. Puisque le second membre est sous la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ avec P de degré 0 et $m = 1$ non racine de (E_c), on cherche y_p sous la forme $y_p : x \mapsto a\,\mathrm{e}^x$. Posons $a \in \mathbb{R}$ et

$$y_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\,\mathrm{e}^x \end{array}.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_p'(x) = a\,\mathrm{e}^x \text{ et } y_p''(x) = a\,\mathrm{e}^x.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcll} y_p \text{ solution de } (E_1) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & a\,\mathrm{e}^x - 2a\,\mathrm{e}^x + 2a\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & a - 2a + 2a = 1 \qquad \text{car } \mathrm{e}^x \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & a = 1. & \end{array}$$

Ainsi, $y_p : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est UNE solution de (E_1). Conclusion, l'ensemble des solutions réelles de (E_1) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{E_1} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \left(1 + A\cos(x) + B\sin(x) \right) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

3. (a) Justifions qu'il existe un unique $y_1 \in \mathscr{S}_{E_1}$ tel que $y_1(0) = 3$ et $y_1'(0) = 6$. On cherche donc y_1 tel que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ y_1''(x) - 2y_1'(x) + 2y_1(x) = \mathrm{e}^x \\ y_1(0) = 3,\ y_1'(0) = 6. \end{cases}$$

Les coefficients $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$ sont constants, le second membre $d : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ qui comprend l'instant initial 0. On reconnait donc un problème de Cauchy. Or par le théorème de Cauchy, un problème de Cauchy admet une et une seule solution. Conclusion,

$$\boxed{\text{il existe un unique } y_1 \in \mathscr{S}_{E_1} \text{ tel que } y_1(0) = 3 \text{ et } y_1'(0) = 6.}$$

(b) Déterminons y_1. On a $y_1 \in \mathscr{S}_{E_1}$. Donc par la question 2.

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1(x) = \mathrm{e}^x \left(1 + A\cos(x) + B\sin(x) \right).$$

Aussi, y_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1'(x) = \mathrm{e}^x\left(1 + A\cos(x) + B\sin(x)\right) + \mathrm{e}^x\left(-A\sin(x) + B\cos(x)\right)$$

Donc

$$\begin{cases} y_1(0) = 3 \\ y_1'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + A = 3 \\ 1 + A + B = 6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + A = 3 \\ B = 3 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{y_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x\left(1 + 2\cos(x) + 3\sin(x)\right). \end{array}}$$

4. Déterminons y_{p2} une solution complexe de (E_2). Le second membre est sous la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ avec $P(x) = 1$ de degré 0 et $m = 1 + i$ est racine simple de (E_c). On cherche donc y_{p2} sous la forme $x \mapsto ax\,\mathrm{e}^{(1+i)x}$. Soit $a \in \mathbb{C}$. Posons

$$y_{p2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & ax\,\mathrm{e}^{(1+i)x}. \end{array}$$

La fonction y_{p2} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_{p2}'(x) & = \left(a + ax\left(1+i\right)\right)\mathrm{e}^{(1+i)x} \\ y_{p2}''(x) & = \left(a\left(1+i\right) + \left(a + ax\left(1+i\right)\right)\left(1+i\right)\right)\mathrm{e}^{(1+i)x} \\ & = \left(2a\left(1+i\right) + ax\left(1 + 2i - 1\right)\right)\mathrm{e}^{(1+i)x} \\ & = \left(2a\left(1+i\right) + 2iax\right)\mathrm{e}^{(1+i)x}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & y_{p2} \text{ solution de } (E_2) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^{(1+i)x} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(2a\left(1+i\right) + 2iax\right)\mathrm{e}^{(1+i)x} - 2\left(a + ax\left(1+i\right)\right)\mathrm{e}^{(1+i)x} + 2ax\,\mathrm{e}^{(1+i)x} = \mathrm{e}^{(1+i)x} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2a\left(1+i\right) + 2iax - 2\left(a + ax\left(1+i\right)\right) + 2ax = 1 \qquad \text{car } \mathrm{e}^{(1+i)x} \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2ai = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion, une solution complexe de (E_2) est donnée par

$$\boxed{y_{p2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & -\frac{ix}{2}\,\mathrm{e}^{(1+i)x}. \end{array}}$$

5. Déduisons-en $\mathscr{S}_{E_3}$ l'ensemble des solutions réelles de (E_3). On observe que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x\cos(x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(1+i)x}\right)$. Donc par la question précédente, UNE solution de (E_3) est donnée par

$$y_{p3} = \mathrm{Re}\left(y_{p2}\right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_{p3}(x) &= \operatorname{Re}\left(-\frac{ix}{2}\,\mathrm{e}^{(1+i)x}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(-\frac{ix}{2}\,\mathrm{e}^{x}\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)\right) \\ &= \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x}\sin(x). \end{aligned}$$

Donc une solution réelle de (E_3) est donnée par

$$y_{p3} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x}\sin(x). \end{array}$$

Or l'équation homogène associée à (E_3) est (E_0) dont l'ensemble solution a été donné en question 1. Conclusion, l'ensemble des solutions réelles de (E_3) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{E_3} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{x}\left(A\cos(x)+\left(B+\frac{x}{2}\right)\sin(x)\right) \end{array} \middle| \, (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie 2 : A l'ordre 1

On pose $I =]0;+\infty[$. On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction dérivable sur I :

$$(F) \qquad \forall x \in I,\ y'(x) + \frac{2}{x\left(x^2+1\right)}y(x) = \frac{1+x^2}{2x^4+2x^3+x^2}.$$

6. (a) Déterminons $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in I,\ \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On note que pour tout $x\in I$, $x\left(x^2+1\right)\neq 0$ et on a

$$\forall x \in I,\ \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{(a+b)\,x^2+cx+a}{x\left(x^2+1\right)}.$$

Donc pour que $\forall x \in I,\ \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$, on note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} b=-2 \\ c=0 \\ a=2. \end{cases}$$

Conclusion, pour $\boxed{a=2,\ b=-2,\ c=0}$, on a

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad \frac{2}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}.}$$

(b) Déduisons-en sur I l'ensemble des primitives de $\alpha : x \mapsto \frac{2}{x(x^2+1)}$.
Pour tout $x\in I$, $x\neq 0$ et $x^2+1\neq 0$. Donc la fonction α est continue sur I et admet des primitives sur I. De plus, par la question précédente, une primitive de α est donnée pour tout $x\in I$ par

$$A(x) = 2\ln\left(|x|\right) - \ln\left(\left|x^2+1\right|\right) = 2\ln(x) - \ln\left(x^2+1\right) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right).$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de α est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{\alpha} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\ln(x) - \ln\left(x^2+1\right) + K \end{array} \middle| \, K\in\mathbb{R} \right\}.}$$

7. Déterminons sur I l'ensemble des primitives de $\beta : x \mapsto \frac{1}{2x^2+2x+1}$. Soit Δ le discriminant de $2x^2+2x+1$. On a $\Delta = 4-8 = -4 < 0$. Donc pour tout $x \in I$, $2x^2+2x+1 \neq 0$. Donc la fonction β est continue sur I et donc admet des primitives sur I. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \quad \beta(x) &= \frac{1}{2x^2+2x+1}\\ &= \frac{1}{2\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{4}}\frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\\ &= \frac{2}{(2x+1)^2+1}.\end{aligned}$$

Donc une primitive de β est donnée pour tout $x \in I$ par

$$B(x) = \arctan(2x+1).$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de β est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_\beta = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(2x+1)+K \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

8. Précisons et résolvons (F_0) l'équation homogène associée à (F). On a directement,

$$\boxed{(F_0) \qquad \forall x \in I,\ y'(x) + \frac{2}{x(x^2+1)}y(x) = 0.}$$

La fonction $\alpha : x \mapsto \frac{2}{x(x^2+1)}$ est continue sur I donc admet des primitives sur I dont l'une est donnée d'après la question 6.b par $A : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$. Ainsi,

$$\forall x \in I, \quad \mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (F_0) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1+\frac{1}{x^2} \end{array} \right).}$$

9. Déduisons-en $\mathscr{S}_F$ l'ensemble des solutions de (F). Procédons à la méthode de variation de la constante. Posons

- y une fonction dérivable sur I,
- $y_0 : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2}$,
- $\lambda = \frac{y}{y_0}$.

La fonction λ est bien définie sur I car y_0 ne s'annule pas sur I. De plus λ est dérivable sur I comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in I$, on a

$$y(x) = \lambda(x)y_0(x) \qquad \text{et} \qquad y'(x) = \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (F) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I,\ y'(x) + \frac{2}{x\left(x^2+1\right)} y(x) = \frac{1+x^2}{2x^4+2x^3+x^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I,\ \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) + \frac{2}{x\left(x^2+1\right)} \lambda(x) y_0(x) = \frac{1+x^2}{2x^4+2x^3+x^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I,\ \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) \underbrace{\left(y_0'(x) + \frac{2}{x\left(x^2+1\right)} y_0(x)\right)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_{F_0}} = \frac{1+x^2}{2x^4+2x^3+x^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I,\ \lambda'(x) = \frac{1}{y_0(x)} \frac{1+x^2}{2x^4+2x^3+x^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I,\ \lambda'(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \frac{1+x^2}{2x^4+2x^3+x^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I,\ \lambda'(x) = \frac{x^2}{x^2\left(2x^2+2x+1\right)} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I,\ \lambda'(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}.
\end{aligned}$$

On reconnait la fonction β qui est continue sur I et admet des primitives dont l'une est donnée d'après la question 7. par $x \mapsto \arctan(2x+1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (F) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \lambda(x) = \arctan(2x+1) + K \\
& \Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \left(\arctan(2x+1) + K\right) \frac{x^2+1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\arctan(2x+1) + K\right) \frac{x^2+1}{x^2} \end{array} \ \middle|\ K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie 3 : A l'ordre 2 aux coefficients variables

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $I =]0;+\infty[$:

$$(G_0) \qquad \forall x \in I,\ y''(x) - \frac{2x}{1+x^2} y'(x) + \frac{2}{1+x^2} y(x) = 0.$$

10. Soit $R_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \ \middle|\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Déterminons l'ensemble des fonctions $y_R \in R_1$ solutions de (G_0). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Posons $y_R : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$. La fonction y_R est deux fois dérivable sur I et l'on a

$$\begin{aligned}
y_R \text{ solution de } (G_0) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ y''(x) - \frac{2x}{1+x^2} y'(x) + \frac{2}{1+x^2} y(x) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ 0 - \frac{2x}{1+x^2} a + \frac{2}{1+x^2}(ax+b) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ 0 - 2xa + 2(ax+b) = 0 \qquad \text{car } 1+x^2 \neq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ 2b = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad b = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des éléments de R_1 solutions de (G_0) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{R_1} = \left\{ y_R : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax \end{array} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}.}$$

11. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On pose pour tout $x \in I$, $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. La fonction $x \mapsto x$ est deux fois dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in I$, $x \neq 0$. Donc par quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas,

$$\boxed{z \text{ est deux fois dérivable sur } I.}$$

Vérifions que

$$y \text{ solution de } (G_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad z' \text{ solution de } (F_0).$$

On observe que pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x) \\ y'(x) &= z(x) + xz'(x) \\ y''(x) &= z'(x) + z'(x) + xz''(x) = 2z'(x) + xz''(x). \end{aligned}$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (G_0) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \forall x \in I,\ y''(x) - \frac{2x}{1+x^2} y'(x) + \frac{2}{1+x^2} y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \forall x \in I,\ 2z'(x) + xz''(x) - \frac{2x}{1+x^2}\left(z(x) + xz'(x)\right) + \frac{2}{1+x^2} xz(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \forall x \in I,\ xz''(x) + \left(2 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) z'(x) + \left(-\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}\right) z(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \forall x \in I,\ xz''(x) + \frac{2+2x^2-2x^2}{1+x^2} z'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \forall x \in I,\ xz''(x) + \frac{2}{1+x^2} z'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \forall x \in I,\ z''(x) + \frac{2}{x\left(1+x^2\right)} z'(x) = 0 \qquad \text{car } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad z' \text{ solution de } (F_0). \end{aligned}$$

Conclusion, on a

$$\boxed{y \text{ solution de } (G_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad z' \text{ solution de } (F_0).}$$

Nous avons procédé à la méthode d'abaissement du degré à l'aide d'une solution de (G_0).

12. En déduisons-en $\mathscr{S}_{G_0}$ l'ensemble des solutions de (G_0). Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. Avec les notations de la question précédente et par la question 9. on obtient

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (G_0) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \exists K_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad z'(x) = K_1\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \qquad \exists (K_1, K_2) \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad z(x) = K_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + K_2 \\ &\Leftrightarrow \qquad \exists (K_1, K_2) \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad y(x) = xz(x) = K_1\left(x^2 - 1\right) + K_2 x. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (G_0) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{G_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K_1\left(x^2-1\right) + K_2 x \end{array} \middle| \, (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie 4 : Une solution particulière

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur I :

$$(G) \qquad \forall x \in I,\ y''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{2}{1+x^2}y(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x).$$

Soient A et B deux fonctions dérivables sur I telles que

$$\forall x \in I, \qquad xA'(x) + \left(x^2-1\right)B'(x) = 0.$$

On pose alors

$$\forall x \in I, \qquad y_p(x) = xA(x) + \left(x^2-1\right)B(x).$$

13. Déterminons l'ensemble des primitives sur I de $f : x \mapsto x\ln(x)$. La fonction f est continue sur I donc f admet des primitives sur I. De plus, d'après le théorème fondamental de l'analyse UNE primitive de f est donnée par

$$F : \quad x \mapsto \int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in I$. Posons

$$\forall t \in I,\ \begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = \ln(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I,\ \begin{cases} u'(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2\ln(x)}{2} - 0 - \int_1^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2\ln(x)}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=1}^{t=x} \\ &= \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_f = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2(2\ln(x)-1)}{4} + K \end{array} \,\middle|\, K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

14. Déterminons l'ensemble des primitives sur I de $g : x \mapsto \left(1-x^2\right)\ln(x)$. De même que pour la question précédente, on observe que g est continue sur I donc d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$G : \quad x \mapsto \int_1^x \left(1-t^2\right)\ln(t)\,\mathrm{d}t,$$

est une primitive de g. Soit $x \in I$. Posons

$$\forall t \in I,\ \begin{cases} u(t) = t - \frac{t^3}{3} \\ v(t) = \ln(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I,\ \begin{cases} u'(t) = 1 - t^2 \\ v'(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Donc par le théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_1^x \left(1 - t^2\right) \ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\ln(t)\right]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - \int_1^x 1 - \frac{t^2}{3}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - \left[t - \frac{t^3}{9}\right]_{t=1}^{t=x} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - \left(x - \frac{x^3}{9}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right). \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_f = \left\{ \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9} + K \end{array} \ \middle|\ K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

15. Calculons y_p' et y_p'' en fonction uniquement de A, B, A' et B'. La fonction y_p est dérivable sur I comme produit et somme de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in I, \quad y_p'(x) = A(x) + A'(x) + 2xB(x) + \left(x^2 - 1\right)B(x) = A(x) + 2xB(x) + A'(x) + \left(x^2 - 1\right)B'(x)$$

Or par hypothèse, $\forall x \in I$, $xA'(x) + \left(x^2 - 1\right)B'(x) = 0$. Donc

$$\forall x \in I, \quad y_p'(x) = A(x) + 2xB(x).$$

La fonction y_p' est alors elle-même dérivable sur I comme produit et différence de fonctions qui le sont. Donc y_p est deux fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad y_p''(x) = A'(x) + 2B(x) + 2xB'(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \begin{cases} y_p'(x) = A(x) + 2xB(x) \\ y_p''(x) = A'(x) + 2B(x) + 2xB'(x). \end{cases}}$$

16. Montrons que y_p est solution de (G) si et seulement si

$$\forall x \in I, \qquad A'(x) + 2xB'(x) = \left(x^2 + 1\right)\ln(x).$$

Par la question précédente, y_p est deux fois dérivable sur I et l'on a

$$\begin{aligned}
& y_p \text{ solution de } (G) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad y_p''(x) - \frac{2x}{1+x^2} y_p'(x) + \frac{2}{1+x^2} y_p(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad A'(x) + 2B(x) + 2xB'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\left(A(x) + 2xB(x)\right) \\
& \qquad + \frac{2}{1+x^2}\left(xA(x) + \left(x^2-1\right)B(x)\right) = \left(1+x^2\right)\ln(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad A'(x) - \frac{2x}{1+x^2}A(x) + \frac{2x}{1+x^2}A(x) + 2xB'(x) \\
& \qquad + 2B(x) - \frac{4x^2}{1+x^2}B(x) + \frac{2\left(x^2-1\right)}{1+x^2}B(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad A'(x) + 2xB'(x) + \frac{2+2x^2-4x^2+2x^2-2}{1+x^2}B(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad A'(x) + 2xB'(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x).
\end{aligned}$$

Les simplifications proviennent du fait que $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2 - 1$ sont deux solutions de l'équation homogène associée. Conclusion, on a bien

$$\boxed{y_p \text{ solution de } (G) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad A'(x) + 2xB'(x) = \left(x^2+1\right)\ln(x).}$$

17. Déduisons-en A' et B'. On sait aussi que $\forall x \in I$, $xA'(x) + \left(x^2-1\right)B'(x) = 0$. On obtient alors avec la question précédente,

$$\begin{aligned}
& \forall x \in I, \quad \begin{cases} xA'(x) + \left(x^2-1\right)B'(x) = 0 \\ A'(x) + 2xB'(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad \begin{cases} xA'(x) + \left(x^2-1\right)B'(x) = 0 \\ A'(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x) - 2xB'(x) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad \begin{cases} x\left(1+x^2\right)\ln(x) - 2x^2B'(x) + \left(x^2-1\right)B'(x) = 0 \\ A'(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x) - 2xB'(x) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad \begin{cases} x\left(1+x^2\right)\ln(x) = \left(x^2+1\right)B'(x) \\ A'(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x) - 2xB'(x) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad \begin{cases} B'(x) = x\ln(x) \\ A'(x) = \left(1+x^2\right)\ln(x) - 2x^2\ln(x) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad \begin{cases} B'(x) = x\ln(x) \\ A'(x) = \left(1-x^2\right)\ln(x). \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \begin{cases} A'(x) = \left(1-x^2\right)\ln(x) \\ B'(x) = x\ln(x). \end{cases}}$$

18. Par la question précédente on a

$$\forall x \in I, \quad \begin{cases} A'(x) = g(x) \\ B'(x) = f(x). \end{cases}$$

Donc par les questions 13. et 14.

$$\exists\,(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in I, \quad \begin{cases} A(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9} + K_1 \\ B(x) = \frac{x^2(2\ln(x)-1)}{4} + K_2 \end{cases}$$

Puisque $y_p : x \mapsto xA(x) + \left(x^2-1\right)B(x)$, on conclut qu'il existe $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in I$,

$$\boxed{y_p(x) = x^2\left(1-\frac{x^2}{3}\right)\ln(x) - x^2 + \frac{x^4}{9} + \left(1-x^2\right)\frac{x^2\left(2\ln(x)-1\right)}{4} + K_1 x + K_2\left(1-x^2\right).}$$

Problème III - Matrices

Soients

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, on pose $C = A - B$.

Partie 1 : Puissances de A, méthode 1

1. Montrons que P est inversible et calculons P^{-1}. En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$\begin{array}{lcl} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

On vérifie toujours son résultat en calculant PP^{-1} ou $P^{-1}P$:

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = I_3 \ \textit{OK!}$$

2. Calculons $T = P^{-1}AP$. On a les calculs dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivants :

$$\begin{aligned} T &= P^{-1}AP \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$

3. D'une part, on a
$$\mathrm{Tr}\,(A)=2+0+2=4.$$
D'autre part, par la question précédente, on a
$$\mathrm{Tr}\,(T)=2+1+1=4.$$
Conclusion, on a
$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(A)=\mathrm{Tr}\,(T)\,.}$$
Ceci est une propriété générale car puisque $Tr\,(UV)=Tr\,(VU)$, on a avec $U=P$ et $V=TP^{-1}$,
$$Tr\,(A)=Tr\left(PTP^{-1}\right)=Tr\left(TP^{-1}P\right)=Tr\,(T)\,.$$

4. Calculons T^2 et T^3. On a les égalités matricielles suivantes :
$$T^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
Puis,
$$T^3=T^2T\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
Conclusion,
$$\boxed{T^2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad T^3=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$

5. Déterminons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, T^n. Grâce à la question précédente, on intuite que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $T^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$. Procédons par récurrence. Posons
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathscr{P}(n):\quad « \, T^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix} ».$$
Initialisation. Si $n=0$, on a
$$\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3=T^0.$$
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est alors aussi vraie. On a

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n T \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

6. Par définition, $T = P^{-1}AP$. Donc $A = PTP^{-1}$. Dès lors, par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. Donc par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 2^n & 2^n \\ 2 & n+2 & n+1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & n + 3 - 2^{n+1} & n + 2 - 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 2 - n & 2^{n+1} - 1 - n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & n + 3 - 2^{n+1} & n + 2 - 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 2 - n & 2^{n+1} - 1 - n \end{pmatrix}.}$$

Partie 2 : Puissances de A, méthode 2

7. Gentille question. On a directement

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.}$$

8. On a

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 & 4-4 & 4-4 \\ 4-16+12 & 4-16+12 & 4-16+12 \\ -4+12-8 & -4+12-8 & -4+12-8 \end{pmatrix} = O_3.$$

De même,

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = O_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{BC = CB = O_3.}$$

9. Par construction de C, on a $A = B + C$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = (B+C)^n$. Or par la question précédente, les matrices B et C commutent. Donc par la formule de binôme de Newton, on a

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k}.$$

Si $n \geqslant 2$, en extrayant les termes de chaque bord, on obtient que

$$A^n = C^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} B^k C^{n-k} + B^n.$$

Les deux matrices étant commutatives, on peut aussi écrire que

$$\begin{aligned} A^n &= C^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \underbrace{BC}_{=O_3} B^{k-1} C^{n-k-1} + B^n && \text{car } k \geqslant 1 \text{ et } k \leqslant n-1 \\ &= C^n + O_3 + B^n && \text{par la question précédente} \\ &= B^n + C^n. \end{aligned}$$

On observe que cette formule reste vraie si $n = 1$ par définition de C. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = B^n + C^n.}$$

10. On commence par calculer C^2 :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} = 2C.$$

Par suite, $C^3 = C \times C^2 = C \times (2C) = 2C^2 = 2\,(2C) = 4C$. On conjecture alors la formule suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C^n = 2^{n-1}C$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $C^n = 2^{n-1}C$ ».

Initialisation. Si $n = 1$, alors $2^{n-1}C = 2^0 C = C$ et donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors,

$$\begin{aligned} C^{n+1} = C^n C &= 2^{n-1} CC && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{n-1} C^2 \\ &= 2^{n-1} 2C && \text{par ce qui précède} \\ &= 2^n C. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad C^n = 2^{n-1}C.}$$

On pose

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. On procède de la même façon, commençons par calculer D^2. On a

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

Donc par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad D^n = D.}$$

12. A nouveau, on a

$$E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad E^n = \begin{cases} E & \text{si n=1} \\ O_3 & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases}}$$

13. Calculons

$$D + E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = B.$$

Montrons maintenant que D et E commutent. On a

$$DE = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = E.$$

D'autre part,

$$ED = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = E.$$

Donc les matrices D et E commutent : $DE = ED$. Alors, par la formule du binôme de Newton, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad B^n = (D+E)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E^k D^{n-k}.$$

Donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} B^n &= D^n + \binom{n}{1} E D^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{E^k}_{=O_3} D^{n-k} \\ &= D^n + nED^{n-1} + O_3 && \text{d'après la question précédente, car } k \geqslant 2 \\ &= D + nED && \text{d'après 11.} \\ &= D + nE. \end{aligned}$$

La formule reste vraie si $n = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad B^n = D + nE.}$$

14. Par la question 9., on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n &= B^n + C^n \\ &= B^n + 2^{n-1}C \qquad \text{par la question 10.} \\ &= D + nE + 2^{n-1}C \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & n+3-2^{n+1} & n+2-2^{n+1} \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-2-n & 2^{n+1}-1-n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On note que la formule reste vraie si $n = 0$. Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 6. :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & n+3-2^{n+1} & n+2-2^{n+1} \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-2-n & 2^{n+1}-1-n \end{pmatrix}.}$$

Partie 3 : Exponentielle de matrice

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Si chacun des coefficients de la matrice $S_n(M)$ converge lorsque $n \to +\infty$, on dit que la suite de matrice $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note alors

$$\exp(M) = \lim_{n\to+\infty} S_n(M).$$

On admet que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ converge toujours et donc $\exp(M)$ existe bien.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on admet également le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

15. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On a

$$S_0(M) = \frac{1}{0!}M^0 = I_3.$$

Puis

$$S_1(M) = \frac{1}{0!}M^0 + \frac{1}{1!}M = I_3 + M.$$

Enfin

$$S_2(M) = \frac{1}{0!}M^0 + \frac{1}{1!}M + \frac{1}{2!}M^2 = I_3 + M + \frac{1}{2}M^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_0(M) = I_3, \qquad S_1(M) = I_3 + M, \qquad \text{et} \qquad S_2(M) = I_3 + M + \frac{1}{2}M^2.}$$

16. Soient $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que M est symétrique i.e. que $M^T = M$. Alors, par linéarité de la transposée :
$$S_n(M)^T = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k\right)^T = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(M^k\right)^T.$$
Or par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(M^k\right)^T = \left(M^T\right)^k$. Notez que le résultat est vrai en 0 en particulier car la matrice I_3 est symétrique. Alors,
$$\begin{aligned} S_n(M)^T &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(M^T\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (M)^k && \text{car } M \text{ est symétrique} \\ &= S_n(M). \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{si } M \text{ est symétrique alors } S_n(M) \text{ l'est également.}}$$

17. Cette question n'existe pas.

18. Par la question 9., on a
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad A^k = B^k + C^k.$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} S_n(A) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} A^k \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^{n} \left(B^k + C^k\right) \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^{n} B^k + \sum_{k=1}^{n} C^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} B^k + \sum_{k=0}^{n} C^k - I_3 \\ &= S_n(B) + S_n(C) - I_3. \end{aligned}$$
Donc par passage à la limite,
$$\boxed{\exp(A) = \exp(B) + \exp(C) - I_3.}$$

19. Par la question 10., on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $C^k = 2^{k-1}C$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(C) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}C^k \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}C^k \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{k!}C \\ &= I_3 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}\right)C \\ &= I_3 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - 1\right)C.\end{aligned}$$

Or d'après l'énoncé : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2$. Conclusion,

$$\boxed{\exp(C) = I_3 + \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}C.}$$

20. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la question 13., $B^k = D + kE$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}S_n(B) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}B^k \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}B^k \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(D + kE) \\ &= I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)D + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!}\right)E \\ &= I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1\right)D + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\right)E.\end{aligned}$$

Posons $\tilde{k} = k - 1$ dans la seconde somme. Alors,

$$S_n(B) = I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1\right)D + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)E.$$

Or par l'énoncé, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$. Ainsi,

$$\exp(B) = I_3 + (\mathrm{e} - 1)D + \mathrm{e}\,E.$$

Or $D = B - E$ donc $\exp(B) = I_3 + (\mathrm{e} - 1)(B - E) + \mathrm{e}\,E$. Conclusion,

$$\boxed{\exp(B) = I_3 + (\mathrm{e} - 1)B + E.}$$

21. Par la question 18., on a $\exp(A) = \exp(B) + \exp(C) - I_3$. Donc par les questions précédentes,

$$\exp(A) = I_3 + (\mathrm{e} - 1)B + E + I_3 + \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}C - I_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{\exp(A) = I_3 + (\mathrm{e}-1)B + E + \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}C.}$$

22. Toujours par les questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}\exp(B)\exp(C) &= (I_3 + (\mathrm{e}-1)B + E)\left(I_3 + \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}C\right)\\ &= I_3 + \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}C + (\mathrm{e}-1)B + (\mathrm{e}-1)\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}BC + E + \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}EC.\end{aligned}$$

Or $BC = O_3$ et

$$EC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

Ainsi,

$$\exp(B)\exp(C) = I_3 + \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}C + (\mathrm{e}-1)B + E.$$

Conclusion,

$$\boxed{\exp(B)\exp(C) = \exp(A).}$$

23. Exprimons $\exp(A)$ en fonction de P, P^{-1} et $\exp(T)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k.$$

Or on a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PT^kP^{-1}$. Donc

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}PT^kP^{-1}\right) = P\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}T^k\right)P^{-1} = PS_n(T)P^{-1}.$$

Donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$,

$$\boxed{\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}.}$$

24. Montrons que $\exp(T) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par la question 5.

$$S_n(T) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}T^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} & \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!} \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \end{pmatrix}.$$

Or pour $x = 2$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2.$$

De même, pour $x = 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}.$$

Posons $\tilde{k} = k - 1$, on obtient,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}.$$

Donc pour $x = 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}\,.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(T\right) = \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\exp\left(T\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}.}$$