Epreuve de mathématiques 5
2024-2025

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Continuité-dérivabilité

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $\mathscr{P}(f)$ l'assertion supposant les cinq points suivants :

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+$,
2. f est positive sur $\mathbb{R}_+$,
3. f est non identiquement nulle,
4. $f(0) = 0$,
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ et G une primitive de $x \mapsto xf(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Partie 1 : Un exemple

On suppose dans cette partie uniquement que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que $\mathscr{P}(f)$ est vérifiée.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée n-ième.
3. Montrer que f admet un minimum global et un maximum global sur $\mathbb{R}_+$ que l'on précisera.
4. Montrer qu'il existe exactement deux valeurs α et β, $\alpha < \beta$ telle que $f(\alpha) = f(\beta) = \frac{1}{4}$.
5. Montrer que F est $1/\mathrm{e}$-lipschitzienne.
6. Déterminer F en fonction de $F(0)$.
7. Vérifier que $F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + o(x)$.

Partie 2 : Comportement de G en 0

On reprend f une fonction quelconque vérifiant $\mathscr{P}(f)$.
On veut démontrer le lemme du cours (primitivation du o) qui affirme que $G(x) \underset{x\to 0}{=} G(0) + o(x^2)$.

8. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [0;\eta]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon$.
9. En déduire que pour tout $x \in]0;\eta]$, $0 \leqslant \frac{G(x)-G(0)}{x} \leqslant x\,\varepsilon$.
10. Conclure que $G(x) \underset{x\to 0}{=} G(0) + o(x^2)$.

Partie 3 : Lipschitziannité de F

11. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ \forall x \in [A;+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{f(a)}{2}. \end{cases}$$

12. Vérifier que $a < A$.
13. En déduire que f admet un maximum (et non juste un majorant) sur $\mathbb{R}_+$. On note $M = \max\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f(x)$.
14. Montrer que pour tout $y \in [0;M]$, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = f(x)$.
15. Montrer que F est M-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Problème 2 - Ensembles et applications

Soit E un ensemble. Pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on pose

$$A + B = \{a + b \in E \mid a \in A \text{ et } b \in B\} = \{x \in E \mid \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a + b\}.$$

Partie 1 : Considérations ensemblistes

1. On pose $A = \{0\,;\,1\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ et $B = \{1\,;\,4\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$. Déterminer $A + B$.
2. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $A \neq \emptyset$. Montrer que $A + \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
3. Soient $(A, A', B, B') \in \mathscr{P}(E)^4$ tel que $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$. Montrer que $A + B \subseteq A' + B'$.
4. Soient $(A_1, A_2, B) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrer que

$$(A_1 + B) \cup (A_2 + B) = (A_1 \cup A_2) + B.$$

Partie 2 : Une application dans $A + B$

On fixe dans cette partie $E = \mathbb{R}$ et on pose

$$A = \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad B = \sqrt{2}\mathbb{Z} = \left\{ \sqrt{2}q \in \mathbb{R} \;\middle|\; q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Enfin on définit une application f sur l'ensemble produit $A \times B$ par

$$f \quad : \quad \begin{aligned} A \times B &\to A + B \\ (p, u) &\mapsto p + u. \end{aligned}$$

5. Justifier que $1 \in A + B$ puis montrer que $1 \in f(A \times B)$.
6. L'application f est-elle surjective sur $A + B$?
7. Montrer que f est injective.
8. L'application f est-elle bijective ?
9. Soient $(p, u) \in A \times B$ et $(p', u') \in A \times B$. Montrer que $f(p, u) \times f(p', u') \in A + B$ et déterminer $(P, U) \in A \times B$ tel que $f(P, U) = f(p, u) \times f(p', u')$.

Problème 3 - Analyse asymptotique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

Partie 1 : Régularité et $DL_3(0)$ par deux méthodes

1. Déterminer un équivalent simple de f en 0.
2. En déduire que f est prolongeable par continuité. On appelle encore f la nouvelle fonction prolongée par continuité. Préciser alors $f(0)$.
3. Montrer que
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right).$$
4. Peut-on en déduire (sans calcul) que f est dérivable en 0 ? $\mathscr{C}^1$? $\mathscr{C}^3$?
5. Préciser l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 et donner également la position de cette tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.
6. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.
7. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ en 0.
8. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de f'.
9. Redémontrer alors le résultat de la question 3.
10. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $\ln(3)$ de f.

Partie 2 : $DL_4(0)$

On souhaite améliorer le développement limité de f et l'obtenir à l'ordre 4. On admet que f possède un développement limité à l'ordre 4 en 0 donné par

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + a_4 x^4 + o\left(x^4\right).$$

On admet également que f' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.

11. Calculer le développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^x f(x)$ en 0 à l'ordre 4 en fonction de a_4.
12. Déterminer le développement limité de f' en 0 à l'ordre 3 en fonction de a_4.
13. En déduire le développement limité de $x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1) f'(x)$ en 0 à l'ordre 4 en fonction de a_4.
14. Simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \mathrm{e}^x f(x) + (\mathrm{e}^x - 1) f'(x)$.
On prendra soin de traiter le cas $x = 0$ à part.
15. Conclure en donnant la valeur de a_4.

Partie 3 : Une formule de récurrence pour l'ordre n

On admet dans cette partie que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose également

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

16. Justifier que f admet un développement limité à l'ordre n en 0. On le note

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n o\left(x^n\right), \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Préciser pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ a_k en fonction de $f^{(k)}(0)$.

17. Montrer que h est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
18. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de h.
19. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f\,(2x) + x$. En déduire que h est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
20. A l'aide des deux questions précédentes, retrouver le résultat de la question 3. : préciser a_0, a_1, a_2, a_3.
21. Préciser le développement limité à l'ordre n en 0 de h en fonction des a_k, $k \in [\![0;n]\!]$.
22. En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, $a_{2p+1} = 0$.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

23. Calculer la dérivée $n+1$-ième de $g : x \mapsto u(x)f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ en fonction des $f^{(k)}(x)$ pour $k \in [\![2;n+1]\!]$.
24. En déduire que

$$a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n+1-k)!}$$

25. Retrouver alors le résultat de la question 15.

Fin de l'épreuve