Commentaires du DS5
Analyse asymptotique, ensembles et applications, continuité-dérivabilité

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{55}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1	P2.1	P2.2	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3	Total	Note finale
Moyenne	4,4	0,2	0,4	5	1	1,4	2,4	8,2	1,6	2,6	12,4	18,6	55	8,2
Sur		14	6	10	30	10	10	20	20	10	20	50	100	20

TOTAL : 100 pt

Problème I - Continuité-dérivabilité 30 pt

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $\mathscr{P}(f)$ l'assertion supposant les cinq points suivants :

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+$,
2. f est positive sur $\mathbb{R}_+$,
3. f est non identiquement nulle,
4. $f(0) = 0$,
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ et G une primitive de $x \mapsto xf(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Partie 1 : Un exemple 14 pt

On suppose dans cette partie uniquement que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. **2 pt** Montrer que $\mathscr{P}(f)$ est vérifiée.

   Question sans aucune difficulté et pourtant je n'ai pas souvent mis le total des points. La continuité, positivité, valeur en 0 ne posait absolument aucun problème. La fait d'être non identiquement nulle vous a perturbé cela m'a surpris. Il suffit de trouver un réel x, comme $x = 1$, pour lequel $f(x) \neq 0$. La limite en $+\infty$ est souvent peu claire également, c'est de la croissance comparée tout simplement.

2. **2 pt** Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée n-ième.

   Personne n'a pensé à ce pauvre Leibniz... snif. Quelques copies obtiennent la bonne expression mais une seule fait la démonstration propre par récurrence.

3. **2 pt** Montrer que f admet un minimum global et un maximum global sur $\mathbb{R}_+$ que l'on précisera.

   Question de niveau lycée... peu réussie. Un tableau de variation et lecture du tableau.

4. **2 pt** Montrer qu'il existe exactement deux valeurs α et β, $\alpha < \beta$ telle que $f(\alpha) = f(\beta) = \frac{1}{4}$.

   Il fallait appliquer deux fois le théorème de la bijection : sur $[0;1]$ et sur $[1;+\infty[$. Pas le théorème des valeurs intermédiaires. Certains écrivent $\frac{1}{4} \in f([0;1])$ au lieu de $[f(0);f(1)]$ ce n'est pas la même chose, dans le premier cas vous supposez le résultat ! D'autres ont voulu calculer explicitement F. Lisez votre énoncé en entier avant de commencer !! C'était une question suivante...

5. **2 pt** Montrer que F est $1/\mathrm{e}$-lipschitzienne.

   Un grand classique de l'interro et pourtant pas très réussie. Certains confondent f et F ou parachute une majoration bizarre ou confondent $f(c)$ et $|f(c)|$. Se tromper ici révèle un manque de préparation.

6. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer F en fonction de $F(0)$.

   Plusieurs m'ont répondu par un DL. Ici on veut la fonction intégralement sur $\mathbb{R}_+$ et non juste sur un voisinage de 0. Il manque très très souvent le théorème fondamental de l'analyse et l'apparition de $F(0)$. Ce n'est pas parce que vous êtes une primitive que forcément $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. La fonction de droite est la seule primitive de f qui s'annule en 0. Pour les autres il faut ajouter une constante/$F(0)$ ici.

7. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Vérifier que $F(x) \underset{x \to 0}{=} F(0) + o(x)$.

   Facile par la question précédente. Plusieurs passent par le DL de f et le primitive, cela fonctionne aussi.

Partie 2 : Comportement de G en 0 $\boxed{6 \text{ pt}}$

On reprend f une fonction quelconque vérifiant $\mathscr{P}(f)$.
On veut démontrer le lemme du cours (primitivation du o) qui affirme que $G(x) \underset{x \to 0}{=} G(0) + o\left(x^2\right)$.

8. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [0;\eta]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon$.

   Beaucoup de parachutage ou de paraphrase du résultat ce qui ne rapporte pas de point. Plusieurs parachutent le $f(x) \geqslant 0$ au lieu de $f(x) \geqslant -\varepsilon$ dans un premier temps. Il fallait invoquer la continuité de f en 0 pour parler de limite pour ENSUITE la rédiger en terme de ε.

9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que pour tout $x \in]0;\eta]$, $0 \leqslant \frac{G(x)-G(0)}{x} \leqslant x\,\varepsilon$.

   Aucune bonne réponse. Plusieurs forçage en confondant G' et son taux d'accroissement. Je rappelle que la dérivée n'est pas un accroissement mais **une limite** du taux d'accroissement. Il fallait juste appliquer le théorème des accroissements finis, cela est naturel car ce théorème relie l'accroissement à la dérivée.

10. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Conclure que $G(x) \underset{x \to 0}{=} G(0) + o\left(x^2\right)$.

    Non réussie. Pas si dure.

Partie 3 : Lipschitziannité de F $\boxed{10 \text{ pt}}$

11. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

    $$\begin{cases} f(a) > 0 \\ \forall x \in [A;+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{f(a)}{2}. \end{cases}$$

    Aucune bonne réponse.

12. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Vérifier que $a < A$.

    Non réussie

13. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que f admet un maximum (et non juste un majorant) sur $\mathbb{R}_+$. On note $M = \max\limits_{x \in \mathbb{R}_+} f(x)$.

    J'ai généreusement mis un demi-point si vous citiez le théorème des bornes atteintes... mais ce théorème s'applique sur un segment et non sur $\mathbb{R}_+$ (smiley énervé). Aucune bonne réponse et pourtant assez similaire à ce qui a été fait en TD.

14. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $y \in [0;M]$, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = f(x)$.

    C'est simplement le théorème des valeurs intermédiaires. Très peu réussie.

15. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que F est M-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

    Un grand classique encore de l'interro. Quelques bonnes réponses mais trop peu.

Problème II - Ensembles et applications $\boxed{20\text{ pt}}$

Soit E un ensemble. Pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on pose

$$A+B = \{a+b \in E \mid a \in A \text{ et } b \in B\} = \{x \in E \mid \exists (a,b) \in A \times B,\ x = a+b\}.$$

Partie 1 : Considérations ensemblistes $\boxed{10\text{ pt}}$

1. $\boxed{2\text{ pt}}$ On pose $A = \{0\,;\,1\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ et $B = \{1\,;\,4\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$. Déterminer $A+B$.
   Un massacre. Peu comprennent l'énoncé et la définition, dommage.

2. $\boxed{2\text{ pt}}$ Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $A \neq \emptyset$. Montrer que $A + \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
   Peu traitée et des arnaques. Une bonne réponse.

3. $\boxed{2\text{ pt}}$ Soient $(A, A', B, B') \in \mathscr{P}(E)^4$ tel que $A \subset A'$ et $B \subset B'$. Montrer que $A+B \subset A'+B'$.
   Idem

4. $\boxed{4\text{ pt}}$ Soient $(A_1, A_2, B) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrer que

$$(A_1 + B) \cup (A_2 + B) = (A_1 \cup A_2) + B.$$

   Idem

Partie 2 : Une application dans $A+B$ $\boxed{10\text{ pt}}$

On fixe dans cette partie $E = \mathbb{R}$ et on pose

$$A = \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad B = \sqrt{2}\mathbb{Z} = \left\{ \sqrt{2}q \in \mathbb{R} \;\middle|\; q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Enfin on définit une application f sur l'ensemble produit $A \times B$ par

$$f \quad : \quad \begin{array}{l} A \times B \to A+B \\ (p,u) \mapsto p+u. \end{array}$$

5. $\boxed{2\text{ pt}}$ Justifier que $1 \in A+B$ puis montrer que $1 \in f(A \times B)$.
   Question facile lorsque l'on a compris la définition. Peu réussie.

6. $\boxed{2\text{ pt}}$ L'application f est-elle surjective sur $A+B$?
   Un demi-point pour la définition de la surjectivité. Très peu réussie.

7. $\boxed{3\text{ pt}}$ Montrer que f est injective.
   Idem

8. $\boxed{1\text{ pt}}$ L'application f est-elle bijective ?
   Facile mais en ayant réussie les deux précédentes.

9. $\boxed{2\text{ pt}}$ Soient $(p,u) \in A \times B$ et $(p',u') \in A \times B$. Montrer que $f(p,u) \times f(p',u') \in A+B$ et déterminer $(P,U) \in A \times B$ tel que $f(P,U) = f(p,u) \times f(p',u')$.
   Deux bonnes réponses

Problème III - Analyse asymptotique $\boxed{50\text{ pt}}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

Partie 1 : Régularité et $DL_3(0)$ par deux méthodes $\boxed{20\text{ pt}}$

1. $\boxed{2\text{ pt}}$ Déterminer un équivalent simple de f en 0.

   Peu de bonnes réponses et plusieurs parachutages pourtant la question est très abordable.

2. $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire que f est prolongeable par continuité. On appelle encore f la nouvelle fonction prolongée par continuité. Préciser alors $f(0)$.

   Certains confondent prolongeable par continuité et continuité. Sinon deux points facilement donnés grâce à la question précédente.

3. $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que

   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right).$$

   Beaucoup de lacunes ici et ensuite dans la gestion du petit o, cela révèle un manque de rigueur et d'entrainement. La question est un peu calculatoire mais sans astuce particulière.

4. $\boxed{1\text{ pt}}$ Peut-on en déduire (sans calcul) que f est dérivable en 0 ? $\mathscr{C}^1$? $\mathscr{C}^3$?

   Le cours n'est pas su pour beaucoup d'entre vous.

5. $\boxed{2\text{ pt}}$ Préciser l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 et donner également la position de cette tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

   Mieux réussi, là aussi deux points faciles à obtenir. Attention à la justification de la position : d'abord on passe à l'équivalent puis on cite « deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré » et enfin on conclut.

6. $\boxed{2\text{ pt}}$ Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.

   Cadeau, bien réussie.

7. $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ en 0.

   Très peu réussie et beaucoup de confusions. Peu d'entre vous connaissent vraiment le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$. La limite de la dérivée a aussi posé beaucoup de problème.

8. $\boxed{3\text{ pt}}$ Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de f'.

   Très peu réussie. Problème de gestion d'ordre et du petit o sans compter les erreurs de calcul ou de raisonnement en prenant un u qui ne tend pas vers 0.

9. $\boxed{2\text{ pt}}$ Redémontrer alors le résultat de la question 3.

   Un peu mieux, plusieurs ont bien vu le théorème de primitivation. Pas assez à mon goût malheureusement.

10. $\boxed{2\text{ pt}}$ Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $\ln(3)$ de f.

    Plusieurs confondent $f(x)$ et $f(h)$ et recommence alors la question 3 ! ! Peu de réponses abouties.

Partie 2 : $DL_4(0)$ 10 pt

On souhaite améliorer le développement limité de f et l'obtenir à l'ordre 4. On admet que f possède un développement limité à l'ordre 4 en 0 donné par

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + a_4 x^4 + o\left(x^4\right).$$

On admet également que f' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.

11. 2 pt Calculer le développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^x f(x)$ en 0 à l'ordre 4 en fonction de a_4.

    Seul un produit était demandé et malgré cela même ici peu de bonnes réponses.

12. 2 pt Déterminer le développement limité de f' en 0 à l'ordre 3 en fonction de a_4.

    Il fallait dériver proprement le DL de la question précédente. Beaucoup ne connaissent pas le raisonnement pourtant vu en TD. D'autres sont partis de l'expression de f' (sans le a_4 cela ne répond donc pas à la question). D'autres enfin ont bricolé du f' à l'aide du f. Astucieux mais c'est le but des questions 14 et 15 et donc cela ne permettait pas de conclure cette partie.

13. 2 pt En déduire le développement limité de $x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1) f'(x)$ en 0 à l'ordre 4 en fonction de a_4.

    Là encore beaucoup d'erreurs lorsque la question est abordée.

14. 2 pt Simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \mathrm{e}^x f(x) + (\mathrm{e}^x - 1) f'(x)$.

    On prendra soin de traiter le cas $x = 0$ à part.

    Certains ont donné une égalité asymptotique en comparant les DL c'est complètement hors sujet puisque l'on veut une égalité sur $\mathbb{R}$. Deux ou trois bonnes réponses.

15. 2 pt Conclure en donnant la valeur de a_4.

    Non traitée.

Partie 3 : Une formule de récurrence pour l'ordre n 20 pt

On admet dans cette partie que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose également

$$h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

16. 2 pt Justifier que f admet un développement limité à l'ordre n en 0. On le note

    $$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right), \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

    Préciser pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ a_k en fonction de $f^{(k)}(0)$.

    La formule de Taylor-Young n'est pas connue pour la plupart d'entre vous. Inadmissible. Je ne peux pas apprendre le cours à votre place.

17. 2 pt Montrer que h est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

    Non su. Question un peu plus longue mais de toute façon, beaucoup ne savent pas ce qu'il faut faire. Pourtant c'est un grand classique de l'interrogation.

18. 2 pt Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de h.

    Plusieurs bonnes réponses mais aussi toujours beaucoup d'erreurs.

19. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(2x) + x$. En déduire que h est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

    Il fallait traiter 0 à part. Quelques réponses... seulement alors que la question n'est pas très dure. On pouvait partir de h comme de f au choix.

20. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ A l'aide des deux questions précédentes, retrouver le résultat de la question 3. : préciser a_0, a_1, a_2, a_3.

    Peu traitée. Une ou deux bonnes réponses.

21. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Préciser le développement limité à l'ordre n en 0 de h en fonction des a_k, $k \in [\![0;n]\!]$.

    Idem.

22. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, $a_{2p+1} = 0$.

    Non traitée. Question demandant plus d'autonomie.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

23. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer la dérivée $n+1$-ième de $g : x \mapsto u(x)f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ en fonction des $f^{(k)}(x)$ pour $k \in [\![2; n+1]\!]$.

    Non traitée.

24. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que

$$a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n+1-k)!}$$

    Non traitée.

25. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Retrouver alors le résultat de la question 15.

    Non traitée.